

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла

«На правах рукопису»
УДК 537.611.45

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
_____ В.Й.Котовський
(підпис) (ініціали, прізвище)
“ ____ ” _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності (спеціалізації) 104 – фізика та астрономія (комп’ютерне моделювання фізичних процесів)

на тему: **Взаємодія скіріміонподібних розв’язків рівняння Ландау-Ліфшица в антиферромагнетику**

Виконала: студентка 2 курсу магістерського рівня, групи ОФ-81мп
(шифр групи)
_____ **Заверталюк Ірина Вікторівна** _____
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник проф. кафедри загальної та експериментальної фізики
проф., д.ф.-м.н. Горобець О.Ю.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент Дереча Дмитро Олександрович
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____
(підпис)

АНОТАЦІЯ

ДО ЗВІТУ З МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

СТУДЕНТА ФМФ, 2 КУРСУ МАГІСТЕРСЬКОГО РІВНЯ ГР. ОФ-81мп

Заверталюк Ірини Вікторівни

(ПІБ)

На тему “Взаємодія скіrmіонподібних розв’язків рівняння Ландау – Ліфшица в антиферомагнетику”

Науковий керівник Професор. Доктор-фізико-математичних наук.

Горобець Оксана Юріївна

Актуальність

На сьогоднішній день дослідження в області спінтроники і магнітоелектроніки – магніони є надзвичайно актуальним, тому що цей напрямок досліджень вивчає застосування магнітних структур для реалізації їх в елементній базі систем обробки та передачі інформаційних сигналів. На сьогоднішній день активно досліджуються сучасні підходи до розробки, створення мікро- та наноелектронних пристроїв на основі магнітних матеріалів, перевагами таких пристроїв є швидкодія (робочі частоти від десятків Гц – ТГц) та нанорозміри відповідних пристроїв (розмірів носіїв бітів інформації від десятків до сотень нм), можливість зберігання інформації протягом тривалого часу без витрат енергії. Для моделювання динаміки параметру порядку в феро- та антиферомагнітних матеріалах використовується рівняння Ландау-Ліфшица, як основа магніоники. Такі розв’язки, як рівняння Ландау-Ліфшица, як скіrmіони є перспективними носіями інформації, дослідженню яких присвячена дана робота.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Магістерське дослідження виконано в межах науково-дослідної теми: «Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованих струмів з магнітною неоднорідністю в наноструктурованих феромагнітних матеріалах» кафедри загальної та експериментальної фізики Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».

Об’єкт дослідження Скіrmіони та їх зв’язані стани в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці.

Предмет дослідження Енергія та густина енергії скіrmіонів та їх зв’язаних станів в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці.

Мета роботи

Розрахувати аналітично енергію та різницю густини енергії скіrmіонів та їх зв’язаних станів в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці, а також проаналізувати залежності різниці густини енергії скіrmіонподібних розв’язків

рівняння Ландау -Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці від параметрів системи.

Методи дослідження

Методи математичного аналізу, методи теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, методи математичної фізики.

Відомості про обсяг звіту, кількість ілюстрацій, таблиць, додатків і літературних найменувань за переліком використаних 94 сторінок звіту, 31 ілюстрацій, 71 літературних найменувань

Мета індивідуального завдання, використані методи та отримані результати

За допомогою рівняння Ландау – Ліфшица розрахувати енергію та густину енергії для скіrmіонподібних розв'язків рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці. Дослідження проводилися аналітичним методом з використанням сучасних методів теоретичної фізики. Динаміка магнітного моменту в системах з передачею спіну описувалась рівнянням Ландау- Ліфшица.

Висновок

Показано, основні аспекти динаміки і взаємодії магнітних скіrmіонів в нанооболонках на основі аналітичної моделі, а також вперше побудовано аналітичну модель зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферомагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія; вперше побудовано аналітичну модель зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферомагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія; вперше аналітично розраховано різницю густини енергії для зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферомагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія; вперше аналітично розраховано різницю густини енергії для зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферомагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морі.

Перелік ключових слів (не більше 20)

Антиферомагнетик, магнітна анізотропія, скіrmіон, спінтроніка, магنونіка, скіrmіоніуми

Підпис керівника_____

SUMMARY

TO THE MASTER'S DISSERTATION REPORT

STUDENT OF FMF, 2 COURSE OF THE MASTER LEVEL, GR. OF-81mp

Zavertaliuk Iryna

On the topic

Interaction of skyrmion-similar solutions of the Landau - Lifshitz equation in antiferromagnets

Scientific supervisor

Professor. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Gorobets Oksana Yurevna

Topicality The results of recent research in the field of spintronics and magnetoelectronics - magnonics are presented. Modern approaches to the development, creation and research of micro- and nanoelectronic devices based on magnetic materials are considered and analyzed. Particular attention is paid to the physics of microwave processes occurring in such systems. In particular, the Landau – Lifshitz equation is considered as the basis of magnonics. Also skyrmions, domain walls. Investigation of the skyrmion-similar Solution of the Landau-Lifshitz Equation in Antiferromagnet. The results of the application of magnetic structures for their implementation in the elementary base of systems of processing and transmission of information signals are presented.

Relationship of work with scientific programs, plans, themes

The master's research was performed within the framework of the research theme: "Interaction of spin waves and spin-polarized currents with magnetic inhomogeneity in nanostructured ferromagnetic materials" of the Department of General and Experimental Physics of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

Object of research

Skyrmions and their associated states in cylindrical antiferromagnetic nano-shell.

Subject of research

Energy and difference of energy density of skyrmion and their bound states in antiferromagnetic cylindrical nano-shell.

Purpose of work

To calculate analytically the energy and the energy density difference of the skyrmions and their bound states in the antiferromagnetic cylindrical nano-shell, as well as to analyze the energy density difference of the skyrmion-like solution of the Landau-Lifshitz equation.

Research methods

Methods of mathematical analysis, methods of differential equation theory in partial derivatives, methods of mathematical physics.

Information about the volume of the report, the number of illustrations, tables, applications and literary names in the list of used ones 94 pages of the report, 31 illustrations, 71 literary titles.

The purpose of the individual task, the methods used and the results obtained

Using the Landau - Lifshitz equation to calculate the energy and energy density for the scurvy junction of the Landau - Lifshitz equation in a cylindrical antiferromagnetic nanowire. The researches were carried out by analytical method using modern methods of theoretical physics. The dynamics of magnetic moment in systems with spin transmission were described by the Landau-Lifshitz equation.

Conclusion

The basic aspects of the dynamics and interaction of magnetic skyrmions in nanoshells are shown on the basis of an analytical model, as well as an analytical model of the coupled state of two skyrmions in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction; for the first time, an analytical model of the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction is constructed; for the first time the energy density difference for the coupled state of two skyrmions in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction was calculated; for the first time the energy density difference for the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and the Dzyaloshinskii-Moriya interaction was calculated analytically.

Keyword list (no more than 20

Antiferromagnet, magnetic anisotropy, skyrmion, spintronics, magnonics, skyrmionium

*Signature of the head*_____

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет фізико-математичний
(повна назва)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною (освітньо-науковою) програмою

Спеціальність (спеціалізація) 104 – фізика та астрономія
(комп'ютерне моделювання фізичних процесів)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

В. Й. Котовський

(підпис)

(ініціали, прізвище)

«___» _____ 20__ р.

**ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентки**

Заверталюк Ірини Вікторівни

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації: «Взаємодія скіrmіонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в антиферромагнетику»

Науковий керівник дисертації проф., д.ф.-м.н. Горобець О.Ю.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «07 листопада» 2019р. № 3850-с

2. Строк подання студентом дисертації 11.12.2019р.

3. Об'єкт дослідження Скіrmіони та їх зв'язані стани в циліндричній антиферромагнітній нанооболонці.

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за освітньо-професійною програмою) Енергія та густина енергії скіrmіонів та їх зв'язаних станів в антиферромагнітній циліндричній нанооболонці.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

- 1) Здійснити аналіз літературних джерел в галузі магнетоники;
- 2) Вивчити програму Wolfram Mathematica;
- 3) Побудувати аналітичну модель зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;

- 4) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графіки векторного поля для вектора намагніченості та антиферромагнетизму на основі аналітичної моделі зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 5) Побудувати аналітичну модель зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 6) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графіки векторного поля для вектора намагніченості та антиферромагнетизму на основі аналітичної моделі зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 7) Розрахувати аналітично густину енергії для зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 8) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення густини енергії антиферромагнітної нанооболонки на основі аналітичної моделі зв'язаного стану двох скіrmіонів в АФМ з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 9) Розрахувати аналітично густину енергії для зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія;
- 10) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення густини енергії антиферромагнітної нанооболонки на основі аналітичної моделі зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

6. Перелік графічного (ілюстративного матеріалу)

“Принцип зчитування”, “Спін-вентильний транзистор”, “Комірка пам'яті MRAM”, “Масив комірок MRAM з шинами запису”, “Магніторезистивна оперативна пам'ять”, “Рух вектора намагнічування при відсутності затухання”, “Рух вектора намагнічування, при слабкому затуханні”, “Рух вектора намагнічування при сильному затуханні”, “Розподіл спінів в доменній стінці”, “Структура магнітного скіrmіона”, “Залежність проекції вектора намагніченості”, “Залежність проекції вектора антиферромагнетизму”, “Векторне поле для вектора намагніченості”, “Векторне поле для вектора антиферромагнетизму”, “Схематичне зображення напрямку проекції вектора намагніченості”, “Схематичне зображення напрямку проекції вектора антиферромагнетизму”, “Різниця поверхневої густини енергії”.

7. Дата видачі завдання 02.09.2019р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Проходження інструктажу з техніки безпеки та охорони праці.	02.09.2019	Виконано
2	Ознайомлення з місцем роботи та засвоєння рекомендацій про виконання програми практики.	02.09.2019-06.09.2019	Виконано
3	Вивчення літературних джерел, складання огляду літератури	09.09.2019-13.09.2019	Виконано
4	Пошук і добір фактичних матеріалів, їх групування	16.09.2019-20.09.2019	Виконано
5	Наукові дослідження за темою МД	23.09.2019-25.10.2019	Виконано
6	Складання заліку з науково-дослідної практики	05.11.2019	Виконано
7	Аналіз отриманих результатів	06.11.2019-11.11.2019	Виконано
8	Підготовка розділів МД на основі отриманих даних по темі МД	12.11.2019-27.11.2019	Виконано
9	Підготовка звіту з МД та оформлення презентацій до захисту	27.11.2019-02.12.2019	Виконано
10	Надання роботи на перевірку керівнику МД	02.12.2019	Виконано
11	Отримання відгуку від керівника МД	02.12.2019	Виконано
12	Перевірка МД на плагіат	03.12.2019	Виконано
13	Подання МД на рецензію	06.12.2019	Виконано
14	Здача МД на нормо-контроль (додержання вимог до оформлення МД)	11.12.2019	
15	Попередній захист МД	11.12.2019	Виконано
16	Виправлення матеріалу МД згідно з зауваженнями комісії на попередньому захисті	12.12.2019-16.12.2019	Виконано
17	Здача МД (друкований та електронний варіанти). Відгуку та	17.12.2019	Виконано

	Рецензії на кафедру загальної фізики та ФТТ		
18	Відсилення анотації МД на сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	17.12.2019	Виконано
19	Остаточний захист МД	19.12.2019	Виконано
20	Відсилення матеріалів МД у бібліотеку «КПІ ім. Ігоря Сікорського» та сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	17.12.2019	Виконано

Студент

(підпис)

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

(підпис)

(ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Актуальність теми

На сьогоднішній день дослідження в області спінтроники і магнітоелектроніки – магنونіки є надзвичайно актуальним, тому що цей напрямок досліджень вивчає застосування магнітних структур для реалізації їх в елементній базі систем обробки та передачі інформаційних сигналів. На сьогоднішній день активно досліджуються сучасні підходи до розробки, створення мікро- та наноелектронних пристроїв на основі магнітних матеріалів, перевагами таких пристроїв є швидкодія (робочі частоти від десятків Гц – ТГц) та нанорозміри відповідних пристроїв (розмірів носіїв бітів інформації від десятків до сотень нм), можливість зберігання інформації протягом тривалого часу без витрат енергії. Для моделювання динаміки параметру порядку в феро- та антиферомагнітній матеріалах використовується рівняння Ландау-Ліфшица, як основа магنونіки. Такі розв'язки, як рівняння Ландау-Ліфшица, як скірміони є перспективними носіями інформації, дослідженню яких присвячена дана робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Магістерське дослідження виконано в межах науково-дослідної теми: «Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованих струмів з магнітною неоднорідністю в наноструктурованих феромагнітних матеріалах» кафедри загальної та експериментальної фізики Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».

Об'єкт дослідження

Скірміони та їх зв'язані стани в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці.

Предмет дослідження

Енергія та різниця густини енергії скірміонів та їх зв'язаних станів в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці.

Мета роботи

Розрахувати аналітично енергію та різницю густини енергії скірміонів та їх зв'язаних станів в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці, а також проаналізувати залежності різниці густини енергії скірміонподібних розв'язків рівняння Ландау -Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці від параметрів системи.

Методи дослідження

Методи математичного аналізу, методи теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, методи математичної фізики.

Задачі дослідження

- 1) Здійснити аналіз літературних джерел в галузі магنونіки.
- 2) Вивчити програму Wolfram Mathematica.
- 3) Побудувати аналітичну модель зв'язаного стану двох скірміонів в антиферомагнетикі з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

4) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графіки векторного поля для вектора намагніченості та антиферромагнетизму на основі аналітичної моделі зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

5) Побудувати аналітичну модель зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

6) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графіки векторного поля для вектора намагніченості та антиферромагнетизму на основі аналітичної моделі зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

7) Розрахувати аналітично різницю густину енергії для зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

8) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення різниці густини енергії антиферромагнітної нанооболонки на основі аналітичної моделі зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

9) Розрахувати аналітично густину енергії для зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

10) Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення різниці густини енергії антиферромагнітної нанооболонки на основі аналітичної моделі зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

Наукова новизна одержаних результатів

1) Вперше побудовано аналітичну модель зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

2) Вперше побудовано аналітичну модель зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

3) Вперше аналітично розраховано різницю густини енергії для зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

4) Вперше аналітично розраховано різницю густини енергії для зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія.

Практичне значення одержаних результатів

Матеріали проведеного дослідження можуть бути використані для конструювання пристроїв сучасної наноелектроніки вивчення магنونіки. Вони можуть бути використані під час викладання курсів та спецкурсів із фізики магнітних явищ.

Ключові слова

Антиферромагнетик, магнітна анізотропія, скіrmіон, спінтроніка, магноніка, скіrmіоніуми

В роботі наведено: використаної літератури - 71, сторінок - 94, рисунків - 31

ABSTRACT

Actuality of theme

To date, research in the field of spintronics and magnetoelectronics - magnonics is extremely relevant, because this area of research studies the use of magnetic structures for their implementation in the elemental basis of systems for processing and transmission of information signals. Today, modern approaches to the development, creation of micro- and nanoelectronic devices based on magnetic materials are being actively researched, the advantages of such devices are the performance (operating frequencies from tens Hz - THz) and nanosize of the corresponding devices (the sizes of carriers of information bits from tens to hundreds of nm)., the ability to store information for a long time without wasting energy. The Landau-Lifshitz equation is used to model the dynamics of the order parameter in ferro- and antiferromagnetic materials as the basis of magnonics. Solutions such as the Landau-Lifshitz equation, such as the skyrmions, are promising carriers of the information that this work is devoted to.

Relationship of work with scientific programs, plans, themes

The master's research was performed within the framework of the research theme: "Interaction of spin waves and spin-polarized currents with magnetic inhomogeneity in nanostructured ferromagnetic materials" of the Department of General and Experimental Physics of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

Object of research

Skyrmions and their associated states in cylindrical antiferromagnetic nano-shell.

Subject of research

Energy and difference of energy density of skyrmion and their bound states in antiferromagnetic cylindrical nano-shell.

Purpose of work

To calculate analytically the energy and the energy density difference of the skyrmions and their bound states in the antiferromagnetic cylindrical nano-shell, as well as to analyze the energy density difference of the skyrmion-like solution of the Landau-Lifshitz equation.

Research methods

Methods of mathematical analysis, methods of differential equation theory in partial derivatives, methods of mathematical physics.

Tasks of research

- 1) Analyze literature sources in the field of magnonics;
- 2) Study the Wolfram Mathematica program;
- 3) To construct an analytical model of the coupled state of two skyrmions in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;
- 4) Design vector field diagrams for magnetization and antiferromagnetism vector based on an analytical model of coupled state of two skyrmions in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction in Wolfram Mathematica;

5) To build an analytical model of the bound state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;

6) Build vector field graphs for the magnetization and antiferromagnet vector using an analytical model of the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;

7) Calculate analytically the difference in energy density for the coupled state of two skyrmions in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;

8) To construct in Wolfram Mathematica a graphical representation of the energy density difference of an antiferromagnetic nano-shell based on an analytical model of the coupled state of two skyrmions in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;

9) To calculate analytically the energy density for the bound state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction;

10) Build a graphical representation of the difference in energy density of an antiferromagnetic nano-shell in the Wolfram Mathematica program, based on an analytical model of the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and Dzyaloshinskii-Moriya interaction.

Scientific novelty of the results

1) For the first time, an analytical model of the coupled state of two skyrmions in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and the Dzyaloshinskii-Moriya interaction is constructed;

2) For the first time, an analytical model of the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy and the Dzyaloshinskii-Moriya interaction is constructed;

3) For the first time, the energy density difference for the coupled state of two skyrmions in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and the Dzyaloshinskii-Moriya interaction is analytically calculated;

4) For the first time, the energy density difference for the coupled state of skyrmion and skyrmionium in antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and the Dzyaloshinskii-Moriya interaction was calculated analytically.

The practical significance of the results

The materials of the study can be used to design modern nanoelectronics devices for the study of magnonics. They can be used in the teaching of courses and courses in the physics of magnetic phenomena.

Keywords

Antiferromagnet, magnetic anisotropy, skyrmion, spintronics, magnonics, skyrmionium

The article contains: used literature - 71, pages: - 94, pictures - 31.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	16
РОЗДІЛ I СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ ПРО МАГНОНІКУ	18
1.1 Історія розвитку магنونіки.....	18
1.2 Переваги спін хвильової наноелектроніки	20
1.2.1 Зчитувальна головка на гігантському магнітоопорі	21
1.2.2 Спін-вентильний транзистор	23
1.2.3 Магніторезистивна оперативна пам'ять	25
1.3 Рівняння Ландау-Ліфшица, як теоретична основа магنونіки	28
1.4 Доменні границі (доменні стінки), скірмаіони – розв'язки не лінійного рівняння Ландау-Ліфшица, як кандидати на носіїв бітів інформації в сучасній наноелектроніці.	33
1.4.1 Доменні границі.....	33
1.4.2 Скірмаіони в феромагнетиках	37
Висновки до розділу I	42
РОЗДІЛ II ЕНЕРГІЯ СКІРМІОН-ПОДІБНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ЛАНДАУ-ЛІФШИЦА В АНТИФЕРОМАГНЕТИКУ	43
2.1 Методика отримання тривимірних аналітичних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в антиферомагнетіку.....	44
2.2 Енергія скірмаіонподібного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці	55
2.3 Аналіз залежності енергії скірмаіонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці від параметрів системи	72
Висновки до розділу II.....	91
ВИСНОВКИ	92
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	94

ВСТУП

За останні роки бурхливо почав розвиватися новий розділ магнетизму – магنونіка. Фактично магنونіка вивчає явища, які пов'язані з динамікою квантів магнітних збуджень – магنونів – у тонких магнітних шарах і багат шарових мікро- та наноструктурах.

Актуальність теми.

На сьогоднішній день магнітні неоднорідності в антиферромагнетику є перспективними кандидатами на роль носіїв інформації в пристроях сучасної наноелектроніки. Їх перевага полягає в тому, що в антиферромагнетику частота коливання параметрів порядку, а також швидкості переміщення магнітних неоднорідностей є набагато більшими, чим в ферромагнетиках, а саме досягаються частоти порядку ТГц та швидкості порядку десятків кілометрів за секунду. Серед таких магнітних неоднорідностей, або іншими словами, топологічних об'єктів традиційно виділяють доменні стінки, скірміони, вихори, антивихори, скірміоніуми, антискірміони, тощо.

Перевага скірміонподібних магнітних неоднорідностей полягає в їх малих розмірах (близько 100 нм і менше), що дозволяє досягти високої щільності запису інформації у пристроях магнітної пам'яті.

На сьогоднішній день існує ціла низка робіт, у яких здійснені чисельні розрахунки статичних та динамічних властивостей скірміонів в антиферромагнетику. Окремим напрямком дослідження в цій галузі є використання точних розв'язків нелінійного рівняння Ландау- Ліфшица в антиферромагнетику для дослідження найбільших загальних властивостей скірміонів в залежності від параметрів системи. Перевага використання точних розв'язків нелінійних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица полягає в тому, що їх прийнято використовувати в тому числі для тестування чисельних

розрахунків. Особливо важливим є застосування точних розв'язків нелінійного рівняння Ландау-Ліфшица в антиферомагнетику у випадках, коли за однакових граничних умов для векторів антиферомагнетизму та намагніченості може існувати більше одного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица. Дійсно для нелінійного рівняння Ландау-Ліфшица не існує теореми єдності розв'язку при заданих початкових і граничних умовах. Саме такий випадок розглянуто в даній магістерській дисертації. А саме в цій магістерській дисертації вперше аналітично розраховано густину енергії скіrmіона та зв'язаних станів скіrmіонів в антиферомагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія у формі циліндричної нанооболонки, а також отримано аналітичні вирази для енергії взаємодії тривимірних скіrmіонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній нанооболонці.

РОЗДІЛ І СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ ПРО МАГНОНІКУ

1.1 Історія розвитку магноніки

Дослідження спінових хвиль в магнітних періодичних структурах почалось ще в кінці 70-х років і продовжуються до цього року. За останні 10 років такі дослідження стали більш інтенсивними. Це стимулює розвиток нових технологій, альтернативних напівпровідниковим технологіям. У випадку магнітних матеріалів таким напрямком став розвиток магноніки. Магноніка – це наука, яка вивчає спінові хвилі, а магнони – це кванти спінових хвиль. Створення інтегральних елементів магноніки, які виробляють операції з магнонами, а також із спінових мікро- і нанохвиль для організації з'єднань між магнонними елементами, обмежується не достатньо вивченими властивостями спінових хвиль в даних структурах.

Спонтанне упорядкування магнітних моментів в феромагнітних речовинах називають обмінною взаємодією. Даний ефект було відкрито у 1928 році Френкелем та Гейзенбергом. Обмінна взаємодія змінює значення очікування відстані, коли хвильові функції двох або більше нерозрізних частинок перекриваються. Ця взаємодія збільшує або зменшує величину очікування відстані між однаковими частинками (порівняно з відмінними частинками). Серед інших наслідків, обмінна взаємодія відповідає за феромагнетизм та об'єм речовини. Вона не має класичного аналога.

Спінові хвилі розповсюджуються в просторі коливань вектора намагніченості феромагнетика. Магнітні моменти виникають з орбітального і спінового моментів електрона, найчастіше саме цей спіновий момент вносить вклад в чистий магнітний момент.

Також, у 2007 році було відкриття феномену магнітоопору у магнітних багат шарових структурах, яке було відзначено Нобелівською Премією з фізики. Він був виявлений в магнітних мультишарах і гранульованих магнітних структурах.

Ранні експерименти з'являлися із вимірювань термодинамічних властивостей феромагнетиків, зокрема, температурної намагніченості. Вперше безпосереднє спостереження спінових хвиль було зроблено за допомогою феромагнітного резонансу, а саме прецесії намагніченості феромагнетиків. Пізніше експерименти з світлового розсіювання Бріллюена, виконані Флері та інші, підтвердили існування спінових хвиль з ненульовими хвильовими векторами, як описано в роботі [1].

Дуже багато аспектів, які пов'язані зі спіновими хвилями можна розглядати, як магнітний аналог звукової або світлової хвилі. Теоретичні та експериментальні дослідження показували, що спінові хвилі демонструють більшість властивостей, притаманних хвилям іншого походження. Подібно до спінтроніки, основний напрям застосування магнітоніки пов'язаний із здатністю спінових хвиль носити та обробляти інформацію в наномасштабах.

Крім того, спінові хвилі регулюються різними взаємодіями, що домінують на шкалах різної довжини, наприклад, шляхом обміну і магнітодипольних взаємодій, що переважають на наномасштабних та мікромасштабних шкалах довжини. Ці характеристики виявилися вирішальними для розуміння спінових хвиль, які поширюються в мікро- та наномагнітних хвилеводах.

1.2 Переваги спін хвильової наноелектроніки

Протягом останніх 10 років досягнення у магнітних пристроях нанометрового масштабу, а також нові методи керування спіновими хвилями в цілому дозволили збільшити використання наномагнетиків. Спінові хвилі поширюють збурення в магнітно впорядкованих матеріалах, аналогічні хвилям у твердих системах і часто описуються з точки зору квазічастинки, як магнони. Привабливі переваги передачі інформації без енергії, використання фази хвилі, як додаткового ступеня свободи та меншої площі сліду в порівнянні зі звичайними пристроями на основі зарядки, зробили спінові хвилі перспективним кандидатом для розрахунку. Проте, будь-яка практична реалізація на основі всієї магнонної обчислювальної системи повинна пройти основні етапи ретельного підбору матеріалів і демонструє стійкість по відношенню до теплового шуму або мінливості.

Вже є розроблені пристрої, які працюють на основі спінових явищ. Наприклад, різновид магнітної пам'яті – MRAM (магніторезистивна оперативна пам'ять), головки, які зчитують інформацію з магнітних дисків, та ін. Всі ці пристрої працюють з використанням гігантського магнітоопору.

1.2.1 Зчитувальна головка на гігантському магнітоопорі

Як говорилося, раніше в пункті 1, що у 2007 році Нобелівську премію отримали фізики Ферт та Грюнберг, які працювали з магнітними полями. Вони ж і відкрили гігантський магнітоопір. Ця технологія дозволяє зчитувати великий обсяг інформації з невеликих поверхонь, наприклад, це використовується у комп'ютерах. У феромагнетику внутрішнє магнітне поле поляризує спін, якщо спін під час руху електрона не змінюється.

Принцип зчитування інформації з головки показано на Рис. 1.1.

Цифрові носії інформації можна створювати, переглядати, поширювати, змінювати та зберігати на пристроях цифрової електроніки у вигляді орієнтованих доменів. На Рис.1.1. показано, лінії вектора індукції магнітного поля \vec{B} . На (Рис.1.1.б) показано, що некомпенсовані позитивні полюси утворюють магнітне поле, там де зіштовхуються головні частини двох протилежно намагнічених доменів ($\leftarrow \rightarrow$). Це поле спрямоване на зовнішнє середовище зберігання інформації, що перпендикулярне до поверхні домену. У тому місці, де зіштовхуються «хвостові» частини двох доменів, стінки містять некомпенсовані, негативні полюси. Останні утворюють стік для силових ліній магнітного потоку, який повертається на носій інформації, який є стінкою негативного домену. Там де зіштовхуються головні частини двох негативно намагнічених доменів ($\rightarrow \leftarrow$) показано на Рис.1.1.в. Головка, яка зчитує інформацію, що записується на магнітну стрічку, представлено на (Рис.1.1.г), як це описано у роботі [3].

На твердих носіях інформації ці головки дозволили отримувати дуже високі щільності запису – до 100 Гбіт на квадратний дюйм. До створення цього ефекту користувалися індукційними котушками. Різниця між новою головкою зчитування інформації та індукційною котушкою звичайно є так, як ємність

магнітних дисків збільшилась в два рази. Тому даною технологією користуються і в даний час.

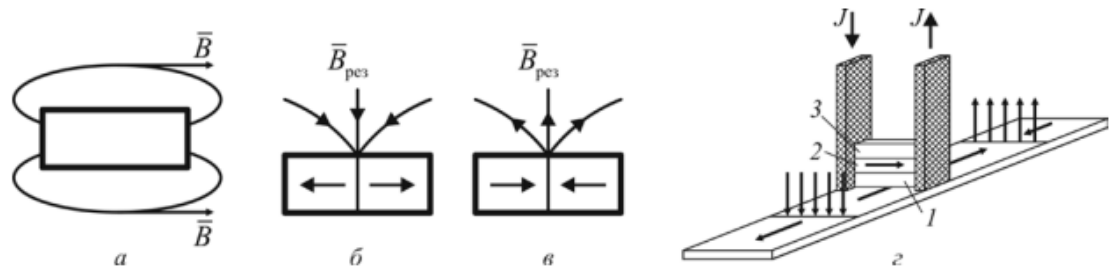


Рис.1.1 Принцип зчитування: а- напрямок ліній вектора магнітної індукції одного домену; б, в – індукція на межі двох доменів; г – схематичне зображення головки, що зчитує інформацію з магнітного носія, як представлено у роботі [2].

1.2.2 Спін-вентильний транзистор

Основні фізичні властивості, що обмежують продуктивність спін-хвильових транзисторів, порівнюються з такими, як звичайні польові транзистори. Простий спіновий транзистор складається з двох феромагнітних плівок, які розділені неферомагнітним напівпровідником. За допомогою магнітного поля можна керувати роботою даного елемента.

Одним із приладів спінтроники є спін-вентильний транзистор. Схему приладу показано на Рис.1.2.а. Аналогічний прилад до транзистора з металевою базою є трьохелектродний прилад. Вузький канал в такому приладі розміщений між витокон і стокон та над ним розташований заслін. Витік і стік характеризується тим, що феромагнетики, намагнічені в одному напрямку, а канал характеризується напівпровідником з 2D електронним газом. Струм, що надходить у канал від джерела, є спінополяризованим. Коли на заслон не подається напруга, тоді струм протікає у стік, а коли напруга подається, то спіні електронів струму прецесує. Регулюючи напругу на заслоні, можна відрегулювати орієнтацію спінів під час проходження каналу. Якщо електрони відбиваються від контуру стока, тоді в кінці вузького каналу спіни мають орієнтацію, як це показано на (Рис.1.2.а). Тоді в такому випадку транзистор має високий опір і це характеризується тим, що опором можна керувати за допомогою електричного поля заслона.

Варіант реалізації спін-вентильного транзистора показано на Рис.1.2.б. Структура даного транзистора складається з багатошарового спінового вентиля, який розташований між областю кремнію n -типу провідності. Саме цей вентиль діє, як емітер та колектор. Щоб потрапити з емітера в колектор, гарячий електрон проходить через спін-вентильну базу. Базу спроектовано як обмінну спін-вентильну систему, яка складається з двох феромагнітних

матеріалів: NiFe і Co. Ці матеріали мають різні коерцитивні сили і розділені шаром з немагнітного матеріалу (Au). Завдяки різниці коерцитивних сил, шари NiFe та Co дозволяють формувати чітко виражену паралельну та антипаралельну орієнтацію намагнічування в широкому температурному діапазоні.

Щоб створити високоякісний бар'єр Шотткі між металевою базою та напівпровідниками з випрямним ефектом розташовують тонкі шари Pt і Au. Для виготовлення такого спін-вентильного транзистора застосовується спеціально розроблена методика, яка передбачає осадження металу на дві кремнієві пластини та подальше їх з'єднання в умовах ультрависокого вакууму.

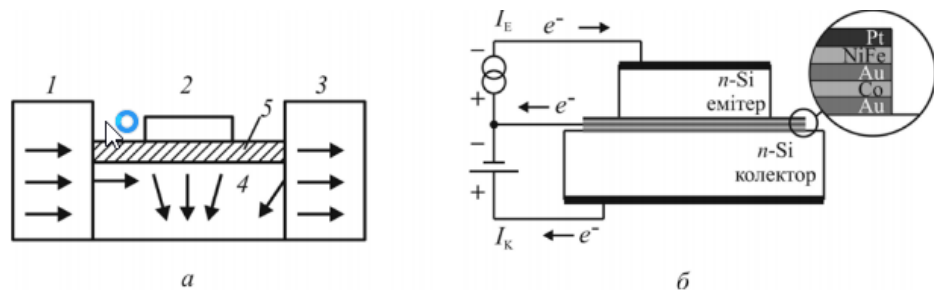


Рис.1.2 Спін-вентильний транзистор:

a – схематичне зображення; *б* – одна з можливих реалізацій з Si-Pt емітером, Si-Au колектором і NiFe-Au-Co спін-вентильною базою; 1 – витік, 2 – заслін, 3 – стік, 4 – канал, 5 – підзаслонний діелектрик [4].

Спін-вентильний транзистор є перспективним для пристроїв магнітної пам'яті та датчиків магнітного поля.

1.2.3 Магніторезистивна оперативна пам'ять

MRAM (магніторезистивна оперативна пам'ять) – це метод зберігання бітів даних за допомогою магнітних станів замість електричних зарядів, що використовуються динамічною пам'яттю оперативної пам'яті.

Основними перевагами даної технології є:

- Здатність зберігати інформацію, без використання зовнішнього живлення;
- Висока швидкість зчитування інформації, порівняно з іншими технологіями;
- Споживає мало енергії;
- Дані MRAM можуть зберігатися тривалий час.

У магніторезистивної оперативної пам'яті кожен біт пам'яті являє собою область феромагнітного матеріалу розміром в декілька нанометрів. Магнітні елементи пам'яті являють собою два феромагнітні шари, які розділені тонким шаром діелектрика. Намагніченість шарів відрізняється один від одного, один з шарів це постійний магніт, а другий шар змінюється під дією зовнішнього магнітного поля. Якщо цей елемент намагнічений в одному напрямку, це відповідає «1», якщо в іншому, то – «0». Елементи розташовані у вигляді квадратної сітки. Кожна комірка обирається подачею живлення на відповідний їй транзистор. За допомогою величини струму можна визначити опір даної комірки, і відповідно, орієнтацію сенсорного шару.

Струм, який протікає по плоскому провіднику, створює магнітне поле, спрямоване в площині провідника перпендикулярно напрямку струму. Щоб перемагнітити ділянку феромагнітного матеріалу, який відповідає одному біту, недостатньо величини електричного струму в одній з керуючих шин. Лише одночасний вплив магнітного поля від обох шин призводить до перемагнічування. Для того щоб отримати високу щільність пам'яті, комірки MRAM, як це показано на Рисунку 1.3, впорядковані в матрицю, в якій кожна шина запису перекриває сотні або навіть тисячі комірок пам'яті (Рис.1.3)

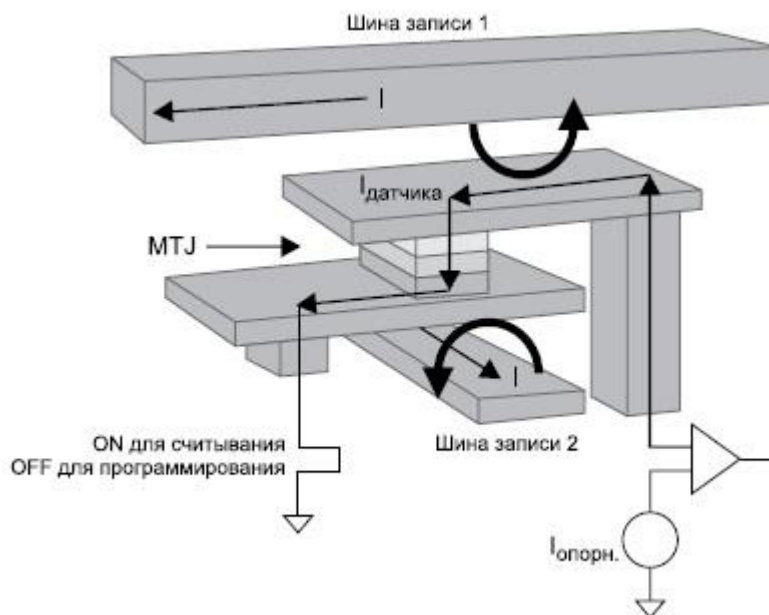


Рис.1.3 Комірка пам'яті MRAM

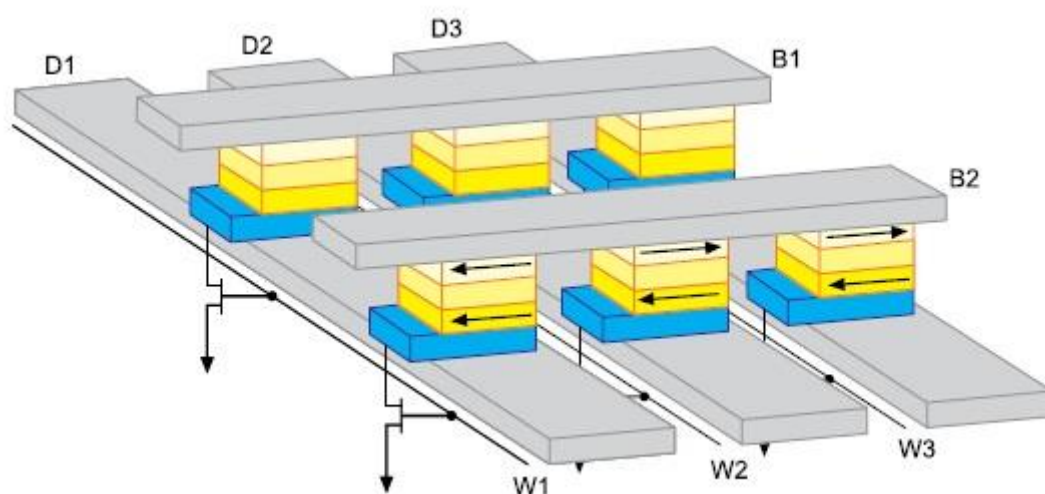


Рис.1.4 Масив комірок MRAM з шинами запису

Таким чином, одночасне використання двох керуючих шин дозволяє направляти запис інформації в певну область, без використання механічно рухомих частин. Зчитування інформації засновано на ефекті гігантського магнітоопору. До керуючих шин прикладається різниця потенціалів. Якщо напрямок намагніченості керованого феромагнітного шару збігається з напрямком намагніченості фіксованого феромагнітного шару, то протікає електричний струм. Якщо напрямок намагніченості керованого шару протилежний намагнічуванню фіксованого шару, тоді струм відсутній. Таким,

чином, якщо є електричний струм, можливо зчитувати біти інформації. Ось такий вона має вигляд :



Рис.1.5 Магніторезистивна оперативна пам'ять

Отже, пам'ять MRAM є революційний запам'ятовуючий пристрій, який забезпечує високу щільність зберігання інформації, високу ступінь надійності по відношенню до всіх альтернативних типів енергозалежної пам'яті.

1.3 Рівняння Ландау-Ліфшица, як теоретична основа магنونіки

Розглянемо важливі динамічні властивості спіну, які описуються рівнянням Ландау-Ліфшица. На спіни, які прецесують, діє момент сил, то рух намагніченості описується рівнянням, яке розглянуто у роботі [6]:

$$\frac{dI}{dt} = -\nu(I \times H) - \frac{4\pi\mu_0\lambda}{I^2}(I \times (I \times H)), \quad (1.1)$$

де I – вектор намагніченості, H – вектор магнітного поля. Коефіцієнт ν – це гіромагнітне співвідношення. Другий доданок описує рух до напрямку сили тертя. Коефіцієнт λ – частота релаксації. Отто Кіттель у своїй роботі [5], записав рівняння (1.1) в іншому вигляді, яке розглядається в роботі [6]:

$$\frac{dI}{dt} = -\nu(I \times H) + 4\pi\mu_0\lambda \left\{ H - \frac{((I \times H) \times I)}{I^2} \right\}. \quad (1.2)$$

Другий доданок, який записаний у фігурних дужках – це магнітне поле H , яке паралельне намагнічуванню I . Наступні складові відповідно, перпендикулярні намагнічуванню. Таким чином, другий доданок – це складова поля, яка визначає обертаючу силу, що діє на I та викликає рух до напрямку H за наявності затухання. Перший доданок визначає інерційний рух $\alpha^2 \ll 1$, де в роботі [6] показано, що

$$\alpha = 4\pi\mu_0 \frac{\lambda}{\nu I}. \quad (1.3)$$

Сила тертя – це сила, яка перешкоджає зміні намагнічування, якщо на вектор I діє результуюча сила, яка залежить від затухання і зовнішнього магнітного поля. Тому рівняння руху, згідно даних роботи [6] має такий вигляд:

$$\frac{dI}{dt} = -\nu \left\{ I \times \left(H - \frac{\alpha}{\nu I} \frac{dI}{dt} \right) \right\}. \quad (1.4)$$

Вперше дане рівняння запропонував Гільберт. Проаналізуємо рух спінів, застосувавши основне рівняння руху. Розглянемо випадок обертання намагнічування I , коли спіни обертаються і залишаються паралельними. Нехай вектор I орієнтований в напрямку z , тоді в напрямку $-z$ намагнічування обернулось до напрямку магнітного поля. Коли затухання відсутнє, врахуємо що $\lambda = 0, \alpha = 0$, тоді рух вектора намагнічування запишемо так, як показано в роботі [6]:

$$\frac{dI}{dt} = -\nu(I \times H). \quad (1.5)$$

Запишемо дане рівняння для кожної компоненти:

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{dt} = \nu I_y \times H \\ \frac{dI_y}{dt} = -\nu I_x H \\ \frac{dI_z}{dt} = 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

тоді з системи (1.6), слідує, вираз який описується в роботі [6]:

$$\begin{cases} I_x = I_s \sin \theta_0 e^{i\omega_0 t} \\ I_y = I_s \sin \theta_0 e^{i\omega_0 t + i\pi/2} \\ I_z = I_s \cos \theta_0 \end{cases}, \quad (1.7)$$

де

$$\omega = \nu H. \quad (1.8)$$

Система (1.7) описує прецесію вектора намагніченості навколо осі z , де кут θ_0 не змінюється. Дана прецесія розглянута на Рис.1.6

Запишемо рівняння (1.4) для кожної складової, яка показана в роботі [6]:

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{dt} = \omega_0 I_y + \alpha \frac{I_y}{I_s} \frac{dI_z}{dt} - \alpha \frac{I_z}{I_s} \frac{dI_y}{dt} \\ \frac{dI_y}{dt} = -\omega_0 I_x + \alpha \frac{I_z}{I_s} \frac{dI_x}{dt} - \alpha \frac{I_x}{I_s} \frac{dI_z}{dt} \\ \frac{dI_z}{dt} = \alpha \frac{I_x}{I_s} \frac{dI_y}{dt} - \alpha \frac{I_y}{I_s} \frac{dI_x}{dt} \end{cases} \quad (1.9)$$

Розв'яжемо систему (1.9) відносно $dI_x / dt, dI_y / dt, dI_z / dt$:

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{dt} = \frac{\omega_0}{1+\alpha^2} I_y + \frac{\omega_0 \alpha}{1+\alpha^2} \frac{I_x I_z}{I_s} \\ \frac{dI_y}{dt} = -\frac{\omega_0}{1+\alpha^2} I_x + \frac{\omega_0 \alpha}{1+\alpha^2} \frac{I_y I_z}{I_s} \\ \frac{dI_z}{dt} = -\frac{\omega_0}{1+\alpha^2} I_s + \frac{\omega_0 \alpha}{1+\alpha^2} \frac{I_z^2}{I_s} \end{cases} \quad (1.10)$$

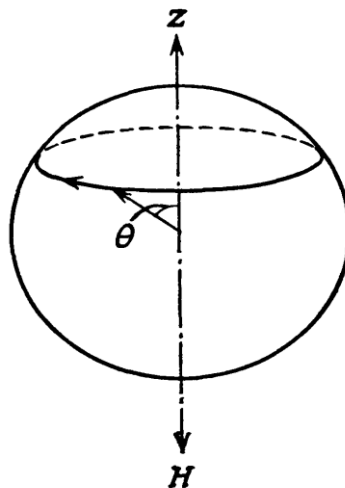


Рис.1.6 Рух вектора намагнічування при відсутності затухання [6]

Користуючись рівняннями (1.1) і (1.2) зможемо отримати систему, котра буде відрізнятись від (1.10) коефіцієнтом котрий при кожному доданку в (1.10)

буде рівний одиниці. Подібне наближення правдиве для $\alpha^2 \ll 1$, але при сильному затуханні $\alpha^2 \gg 1$, використовувати рівняння (1.1) – (1.2) не можна. Розв’язок системи (1.10) згідно даних роботи [6] має такий вигляд:

$$\begin{cases} I_x = I_s \sin \theta e^{i\omega t}, \\ I_y = I_s \sin \theta e^{i\omega t + i\pi/2}, \\ I_z = I_s \cos \theta, \end{cases} \quad (1.11)$$

Кут θ в даному випадку змінюється з часом. Нехай $t = 0, \theta = \theta_0$, тоді знайдемо даний кут, який буде змінюватись з часом, згідно даних роботи [6]

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} e^{-t/\tau}. \quad (1.12)$$

Величини ω і τ , можна виразити таким чином, як показано в роботі [6]:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \alpha^2} = \frac{\omega_0}{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 \tau_0} \right)^2}, \quad (1.13)$$

$$\tau = \tau_0 (1 + \alpha^2) = \tau_0 \left(1 + \left(\frac{1}{\omega_0 \tau_0} \right)^2 \right), \quad (1.14)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha \omega_0} = \frac{I_s}{4\pi\lambda\mu_0 H}. \quad (1.15)$$

При $|\tau_0| \ll |1/\omega_0|$, система (1.11) задає такий рух I_s , при якому вектор намагнічування наближається до напрямку поля, яке здійснює декілька витків навколо осі Oz (Рис.1.7). Цей випадок відрізняється від прецесії, яка була зображена на Рис.1.6. Різниця, в тому що, в даний момент прецесія вектора намагнічування виникає з невеликим затуханням.

При $|\tau_0| \ll 1/|\omega_0|$ система (1.11) описує поворот I_s до напрямку поля, який створюється без прецесії (Рис.1.8). Даний випадок відрізняється від попереднього тим, що затухання під час руху вектора намагнічування дуже велике. Тоді час релаксації стає більшим і для того щоб вектор I_s наблизився до магнітного поля потрібно час. При слабкому затуханні вектор намагнічування, прецесуючи, створює декілька оборотів навколо поля, за відведений час. Якщо застосувати силу тертя, тоді вектор намагнічування швидше повертається до магнітного поля.

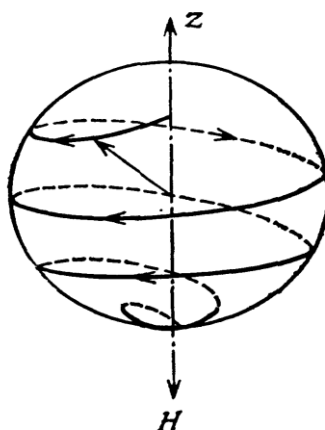


Рис.1.7 Рух вектора намагнічування, при слабкому затуханні

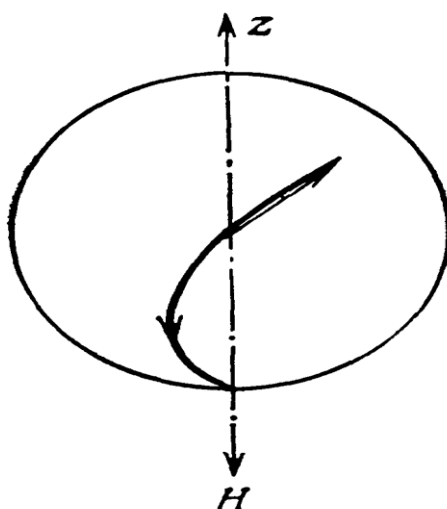


Рисунок 1.8 Рух вектора намагнічування при сильному затуханні, як показано в роботі [6]

1.4 Доменні границі (доменні стінки), скірміони – розв’язки не лінійного рівняння Ландау-Ліфшица, як кандидати на носіїв бітів інформації в сучасній наноелектроніці.

1.4.1 Доменні границі

Магнітні матеріали, в більшості плівки, які виготовлені за нанотехнологіями, створені з метою збільшити ємність магнітної пам’яті. Магнітна частинка, що залишається в одному доменному стані для всіх магнітних полів, називається бітом. Таких частинок дуже мало (як правило, нижче мікрметра в діаметрі). Вони також дуже важливі для багатьох застосувань, оскільки мають високу коерцитивність. Магнітний момент феромагнітного матеріалу, при відсутності зовнішнього магнітного поля може дорівнювати нулю, тому феромагнетик знаходиться в розмагніченому стані. Таке явище обумовлено розбиттям матеріалу на макроскопічні області, вони приймають назву домени. Між сусідніми доменами існує перехідний шар, його ще називають доменною границею, в якій магнітний момент поступово змінює свій напрямок. За рахунок інерції, спіни всередині доменної стінки поступово змінюють напрямок і володіють механічним моментом.

Врахувавши інерцію, закон зміщення 180° доменних границь, описується таким рівнянням руху, де в роботі [6] показано, що

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + \beta \frac{ds}{dt} + \alpha s = 2I_s H, \quad (1.16)$$

де m – маса доменної стінки, β – коефіцієнт, який описує силу тертя, α – коефіцієнт, який описує зворотню силу.

Розглянемо доменну стінку паралельну осі xu . (Рис.1.9)

У кожного спіна з’являється z компонента і створюється розподіл, який відповідає стінці, яка рухається. Тоді магнітне поле можна описати даною формулою, яка описується в роботі [6]:

$$H_z = -\frac{I_z}{\mu_0}. \quad (1.17)$$

За допомогою магнітного поля спіни обертаються навколо осі x , що призводить до зміщення доменної границі. Швидкість обертання спінів під дією магнітного поля, згідно даних роботи [6] має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu H_z = -\frac{\nu I_z}{\mu_0}. \quad (1.18)$$

З іншого боку, величина $\frac{d\varphi}{dt}$ пов'язана зі швидкістю зміщення доменної стінки U наступним співвідношенням, який розглянутий в роботі [6]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} U. \quad (1.19)$$

З рівнянь (1.18) і (1.19) отримуємо, що

$$I_z = \frac{\mu_0}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} U. \quad (1.20)$$

Формула (1.20), описує рух доменної стінки зі швидкістю U і обов'язково всередині виникає намагніченість I_z . Коли стінка рухається, незалежно від дії на неї інших сил, тоді таке явище називається інерцією доменних стінок.

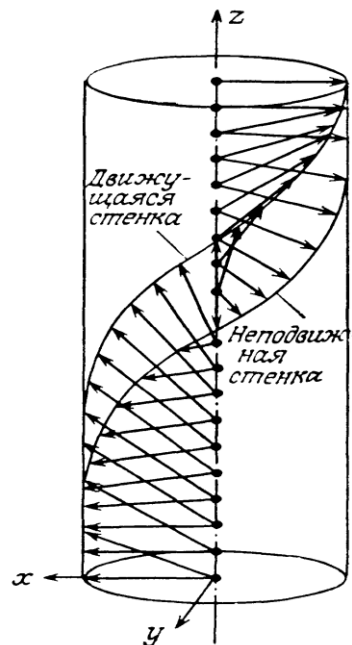


Рис.1.9 Розподіл спінів в доменній стінці, яка рухається [6]

Запишемо рух доменної границі відносно енергії, згідно даних роботи [6] має такий вигляд:

$$\gamma_0 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I_z H_z dz = \frac{\mu_0 v^2}{2v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{\mu_0 v^2}{2v^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\varphi, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{g(\varphi)}. \quad (1.22)$$

Підставимо (1.22) в (1.21) і отримаємо

$$\gamma_0 = \frac{\mu_0 v^2}{2v^2 \sqrt{A}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{g(\varphi)} d\varphi = \frac{\mu_0 \gamma v^2}{4v^2 A}, \quad (1.23)$$

де γ – енергія доменної стінки.

Нехай m – маса доменної границі. Тоді величина γ_0 можна записати, таким чином, як описується в роботі [6]

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} m v^2. \quad (1.24)$$

Порівняємо (1.23) і (1.24) і знайдемо

$$m = \frac{\mu_0 \gamma}{2v^2 A}. \quad (1.25)$$

Розглянемо другий доданок з рівняння (1.16), яке відповідає затуханню. При розгляді вихрових струмів в циліндрі, затухання згідно даних роботи [6] має такий вигляд:

$$\beta = \frac{4I_s^2 R \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)}{\rho}. \quad (1.26)$$

Можемо сказати, що у феритах також з'являється затухання. В загальному випадку при русі вектору намагніченості в магнітному полі втрата енергії описується другим доданком з рівняння Ландау-Ліфшица, яке описується в роботі [7]. Якщо затухання дуже мале, то рух спінів всередині доменної стінки визначається магнітним полем, тоді для z компоненти, рівняння Ландау-Ліфшица, має такий вигляд, як описано в роботі [6]:

$$\frac{dI_z}{dt} = 4\pi\lambda\mu_0 H_z. \quad (1.27)$$

За одиницю часу, магнітне поле здійснює роботу, тоді

$$H_z \frac{dI_z}{dt} = 4\pi\lambda\mu_0 H_z^2. \quad (1.28)$$

Знайдемо затрати енергії при розрахунку на одиницю площі доменної стінки, яке розглядається в роботі [6]:

$$P_\omega = 4\pi\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} H_z^2 dz = \frac{4\pi\mu_0\lambda v^2}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz = \frac{2\pi\mu_0\lambda\gamma v^2}{v^2 A}. \quad (1.29)$$

З іншого боку, зовнішнє магнітне поле за одиницю часу здійснює роботу над рівномірною доменною стінкою

$$P_\omega = 2I_s H v = \beta v^2. \quad (1.30)$$

Прирівняємо рівняння (1.29) і (1.30), тоді

$$\beta = \frac{2\pi\mu_0\lambda\gamma}{v^2 A}. \quad (1.31)$$

В даному випадку, я розглянула швидкість доменної стінки, і можу зробити висновок, що при збільшенні магнітного поля швидкість збільшується лінійно.

1.4.2 Скірміони в феромагнетиках

Магнітні скірміони, які є локалізованими спіновими структурами з топологічним зарядом, через малі розміри та високу рухливість є одними з найперспективніших систем для створення надщільної магнітної пам'яті.

Для їх використання в якості елементів пам'яті важлива інформація про стійкість станів скірміону, особливо коли внутрішні розміри скірміонів порівняні з характерними відстанями між ними або розміром області їх локалізації. Важливу роль відіграє взаємодія скірміонів з дефектами структури та домішками. Однак штучно введені дефекти можуть бути використані для управління динамічними властивостями скірміонів у пристроях магнітної пам'яті.

Енергетична поверхня системи побудована на основі гамільтоніанського типу Гейзенберга, що включає обмінну взаємодію між найближчими сусідами, енергію анізотропії, взаємодію Дзялошинського-Морія та енергетичну взаємодію Зеємана з зовнішнім полем.

Розрахунки проводяться на двовимірній трикутній решітці. Періодичні граничні умови використовуються вздовж одного напрямку, тоді як вільні межі приймаються вздовж іншого. Таким чином, можна вивчити стійкість станів скірміону на «доріжці», яка є смугою кінцевої ширини, залежно від співвідношення внутрішніх розмірів скірміона та ширини доріжки.

Динаміка скірміонів представляє великий інтерес з точки зору перспективи практичного застосування. Топологічний і скірміонний ефект Холла, пов'язаний з ненульовим топологічним зарядом; зонною структурою спектра скірміон магнетонних кристалів; можливістю динамічного управління скірміон станами електричними струмами малих щільностей в енергозберігаючому режимі відкривають широкі перспективи використання скірміонів в пристроях магнетоніки і спінтроніки.

Дослідження динаміки скірмонних розподілів намагніченості проводиться в рамках двох підходів: безпосереднього аналізу рівняння Ландау-Ліфшиця і вирішення рівняння Тіля, яке є приватним випадком рівняння Ландау-Ліфшиця, що є справедливим при солітонноподібній структурі.

Для розрахунку динамічних характеристик скірміонів, зручно скористатися наближеною функцією, використовувати математичні підстановки, які дозволяють описати структуру скірміонного стану. Хорошим наближенням є аналітична функція Белявіна-Полякова $f(z)$, $z = x + iy$, яка була отримана в 1975р. при розрахунку метастабільних станів ізотропних 2D-магнетиків, яка описується в роботі [9].

Розглянемо компоненти вектора намагніченості $m = M / M_s$ їх можна виразити через функцію $f(z)$, таким чином, як розглянуто в роботі [10]

$$\begin{cases} m_x + im_y = \frac{2f(z)}{1 + |f(z)|^2}, \\ m_z = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 + |f(z)|^2}. \end{cases} \quad (1.32)$$

В даному розгляді, я використовую окремий випадок вирішення рівняння Белявіна-Полякова $f(z) = e^{i\Phi_0}(z - s) / c$, який відповідає одному скірміону, який сконцентрований в точку s , де $c = R_c / c$ – приведений радіус магнітного скірміона, Φ_0 – кут, який визначає фазу скірміона, s – безрозмірний параметр, який характеризує зміщення центра скірміона від положення рівноваги в центрі наноточки, R – радіус наноточки. Розглянемо структуру динамічного скірміонного стану, врахувавши тільки низькочастотні гіротропні методи . Скірміони з $\Phi_0 = C\pi / 2$, де $C = \pm 1$ - параметр, який визначає кіральність скірміона, і $\Phi_0 = 0, \pi$ класифікується як блохівські і неелевські скірміони (Рис.1.10).

Для того щоб розрахувати спектр збудження, потрібно використати енергію магнетика та врахувати енергію ізотропного обміну, енергію магнітної анізотропії, енергію магнітостатики, енергію Дзялошинського-Морія.

Запишемо густину магнетика, згідно даних роботи [10] вона має такий вигляд:

$$F = A(\nabla m)^2 + \omega_D - Km_z^2 - \frac{1}{2}M_s m H_m, \quad (1.33)$$

де A – константа обмінної взаємодії, $m = M / M_s$ – одиничний вектор намагнічування, M_s – насичення намагнічування, H_m – магнітостатичне поле, $K > 0$ – константа одновісної магнітної анізотропії, ω_D – енергія Дзялошинського-Морія, яка представлена інваріантом Ліфшица $\omega_D \propto \sum_{k=1}^3 \left(m_i \frac{\partial m_j}{\partial x_k} - m_j \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right)$. Окремий вигляд інваріанта Ліфшица, визначається симетрією системи. Енергія Дзялошинського-Морія має вигляд $\omega_D = D(m \cdot \text{rot} m)$ для кубічних магнітних кристалів із симетрією B20 і $\omega_D^* = D[m_z(\nabla \cdot m) - (m \cdot \nabla)m_z]$ для магнітних плівок.

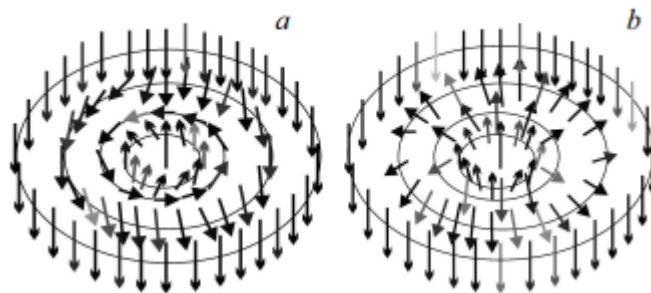


Рис.1.10 Структура магнітного скіrmіона: а)скіrmіон Блоха(оберт намагнічування здійснюється в площині, яка перпендикулярна радіальному напрямку), б) скіrmіон Нееля (оберт намагнічування здійснюється вздовж радіального напрямку) [10].

Розглянемо особливості спектрів спінових хвиль, які збуджуються в ізольованій наноточці. Для цього перейдемо до кутових змінних, $m = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta)$, де θ і Φ – полярний і азимутальний кут в

сферичній системі координат. Рівняння Ландау-Ліфшица, в роботі [10] описується таким чином

$$\dot{M} = -\gamma [M \times H_{eff}] + \frac{\alpha}{M_0} [M \times \dot{M}], H_{eff} = -\frac{\delta F}{\delta M}, \quad (1.34)$$

в кутових змінних має вигляд:

$$\frac{M_s}{2\gamma} \sin \theta \dot{\theta} = A \left((\nabla^2 \Phi) \sin^2 \theta + (\nabla \theta \cdot \nabla \Phi) \sin 2\theta \right) - D (\nabla \theta \cdot m) \sin \theta, \quad (1.35)$$

$$\frac{M_s}{2\gamma} \sin \theta \dot{\Phi} = \left[K + A (\nabla \Phi)^2 \right] \sin \theta \cos \theta - A \nabla^2 \theta - D (\nabla \Phi \cdot m) \sin \theta. \quad (1.36)$$

Перейдемо до локальної системи координат, яка пов'язана з рівномірною намагніченістю m_0 ($m_0 \cdot \delta m = 0$), та введемо заміну $m(r, t) = m_0(r) + \delta m(r, t)$. У вибраній локальній системі координат вісь Oz' збігається з напрямком рівноважної намагніченості, а динамічна рівновага обертається в площині $x'Oy'$. В такому випадку відхилення намагніченості від рівноважного положення, буде мати вигляд згідно даних роботи [10]

$$\begin{cases} \theta(\rho, t) = \theta_0(\rho) + \vartheta(\rho, t), \\ \Phi(\rho, t) = \Phi_0(\rho) + \psi(\rho, t), \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} \vartheta(\rho, t) = a_{nm}(\rho) \cos(m\varphi - \omega t), \\ \mu(\rho, t) = -\sin \theta_0 \psi(\rho, t) = b_{nm}(\rho) \sin(m\varphi - \omega t), \end{cases} \quad (1.38)$$

де a_{nm} і b_{nm} – функції, які визначають радіальні профілі магнетонних мод, n і m – номери радіальних і азимутальних мод, ω – власна частота коливань магнітного скірміона.

Врахуємо, що профіль скірміона визначається пробною функцією, яка описує розподіл намагніченості в радіальній доменній границі $\tan \frac{\theta_0(\rho)}{2} = \exp \frac{\rho - R_c}{\Delta}$, де R_c – координата центра доменної границі, $\Delta = L_e / \sqrt{4\pi(Q-1)}$ – ширина доменної границі. Тоді, при $\theta_0(0) = 0$ скірміон має полярність $\rho = \cos \theta_0(0) = \pm 1$, ці дані описуються в роботі [10].

Отже, лінійне рівняння динаміки, яке отримують після підстановки рівнянь (1.38), (1.37) в систему рівнянь (1.35), (1.36), не залежить від фази скірміона, а є загальними рівняннями для ізольованих скірміонів блохівського та неелевського типу.

Висновки до розділу I

В даному розділі описано результати недавніх досліджень в області магنونіки. Розглянуто та проаналізовано сучасні підходи до розробки, створення і дослідження мікро- та наноелектронних пристроїв на основі магнетичних матеріалів. Зокрема, розглянуто рівняння Ландау-Ліфшица, як основа магنونіки. Представлені результати застосування магнетичних структур для їх реалізації в елементарній базі систем обробки та передачі інформаційних сигналів.

В огляді наведено пристрої, які працюють на основі спінових явищ. Новий тип магнетичної пам'яті – MRAM, головки, які зчитують інформацію з магнетичних дисків, спин вентильні транзистори.

Проаналізовано, основні аспекти динаміки магнетичних скіріміонів у наноточках, з урахуванням розрахунку спектрів спінових хвиль. У ряді досліджень було досліджено спектри збудження високочастотних скіріміонів у наноточках, які показали, що азимутальні спінові хвилі, що поширюються на тлі скіріміона, характеризуються асиметрією відносно обертання моди. Особливістю ізольованої динаміки скіріміону в круглих наноточках є те, що спектр збудження, як низькочастотний, так і високочастотний, ідентичний для скіріміонів типу Блоха та Нееля.

Проте в літературних джерелах немає аналітичних моделей скіріміонів та їх зв'язаних станів в антиферромагнетику зі взаємодією Дзялошинського-Морія в той час, як аналітичні моделі дозволяють дослідити цілу низку фізичних властивостей системи в залежності від її параметрів та слугують для тестування чисельних розрахунків. Тому роботу присвячено побудові аналітичної моделі взаємодії скіріміонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в антиферромагнетичній циліндричній нанооболонці.

РОЗДІЛ II ЕНЕРГІЯ СКІРМІОН-ПОДІБНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ЛАНДАУ-ЛІФШИЦА В АНТИФЕРОМАГНЕТИКУ

Антиферромагнетик являє собою сукупність декількох магнітних підрешіток, кожна з яких характеризується густиною магнітного моменту. При відсутності магнітного поля сума густини магнітних моментів підрешіток обертається в нуль, а при наявності стороннього поля ця сума відрізняється від нуля і виникає макроскопічний магнітний момент антиферромагнетика.

Так як і для ферромагнетика, енергія антиферромагнетика складається з обмінної енергії, енергії магнітної анізотропії енергії магнітно-дипольної взаємодії та енергії антиферромагнетика в сторонньому магнітному полі.

Скірміони – це неколінеарні текстури намагніченості, в яких вісь спінового квантування неперервно змінюється в масштабах довжини та коливається від декількох нанометрів до декількох мікро-метрів. Мікроскопічна скірміонна модуляція намагніченості викликана взаємодією Дзялошинського-Морія не центросиметричних кристалів. Мікро-магнітне моделювання скірміона показує, що антиферромагнітні скірміони рухаються швидше, чим ферромагнітні скірміони.

В даному розділі ми розглядаємо скірміони в антиферромагнетик. Також скірміон, може змінювати своє положення на дуже велику відстань не доторкаючись країв зразка.

2.1 Методика отримання тривимірних аналітичних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в антиферомагнетику

Розглянемо антиферомагнетик з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія. Енергія такого антиферомагнетика має вигляд:

$$W = M_0^2 \int dV \left\{ \frac{\delta \vec{m}^2}{2} + \frac{\alpha}{2} (\nabla \vec{l})^2 + \frac{\alpha'}{2} (\nabla \vec{m})^2 + \frac{\beta_1}{2} l_z^2 + \frac{\beta_2}{2} m_z^2 + \right. \\ \left. + \vec{d} \cdot [\vec{m} \times \vec{l}] - \vec{m} \vec{h}_0 \right\}, \quad (2.1)$$

де α та α' – константи неоднорідного обміну, β_1 та β_2 – константи магнітної анізотропії, $\vec{h}_0 = \frac{2\vec{H}_0}{M_0}$, де \vec{H}_0 – зовнішнє магнітне поле, M_0 – магнітний момент підрешіток, V – об'єм антиферомагнетика, δ – константа однорідного обміну, \vec{d} – вектор Дзялошинського-Морія, \vec{m} – вектор нормованої намагніченості (далі вектор намагніченості), \vec{l} – нормований вектор антиферомагнетизму (далі вектор антиферомагнетизму).

Запишемо компоненти вектора антиферомагнетизму, через кутові змінні:

$$\begin{cases} l_x = \sin \theta \cos \varphi \\ l_y = \sin \theta \sin \varphi, \\ l_z = \cos \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

де l_x, l_y, l_z – декартові координати, θ – полярний кут для \vec{l} , φ – азимутальний кут для \vec{l} .

Тоді рівняння Ландау-Ліфшица для вектора антиферомагнетизму, записані в параметризації сферичної системи координат, мають вигляд [15]:

$$\begin{cases} c^2 \operatorname{div}(\sin^2 \theta \nabla \varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \right] + \frac{\partial \omega_H}{\partial t} = 0, \\ c^2 \Delta \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left[c^2 (\nabla \varphi)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right)^2 - \omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \right] \sin \theta \cos \theta = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{де } \omega_H = gH_0, \quad \omega_H = \frac{|g|M_0 h_0}{2}; \quad c = \frac{\sqrt{\alpha \delta} |g| M_0}{2}; \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{\alpha} \left| \frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right|$$

Рівняння (2.3) використовується, коли вектор Дзялошинського та значення магнітного поля спрямовані вздовж осі Oz .

Знайдемо функції θ , φ у вигляді:

$$\begin{cases} \theta = 2 \arctg[H(P(x, y, z - vt))], \\ \varphi = Q(x, y, z - vt) + \tilde{\varphi}(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

де $\tilde{\varphi}(t) = \int \omega_H(t) dt$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ - це гармонічні функції.

При $\omega_H(t) = \omega_H = \text{const}$; $\tilde{\varphi}(t) = \omega_H \cdot t$.

Зв'язок між тригонометричними функціями, які входять в систему рівнянь Ландау-Ліфшиця (2.3), та функцією $H(P)$ виразимо за наступними формулами:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1 - H^2}{1 + H^2} \\ \sin \theta = \pm \frac{2H}{1 + H^2} \end{cases}, \quad (2.5)$$

Для виразності візьмемо знак «+» в правій частині виразів (2.5), та припустимо що функція θ є додатною, оскільки полярний кут θ визначається в межах $[0, \pi]$.

Запишемо частинну похідну:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (2.6)$$

Знайдемо авто модельний розв'язок рівнянь Ландау-Ліфшиця, який описує рівномірний рух нелінійного статичного розв'язку рівнянь Ландау-Ліфшиця зі швидкістю v вздовж осі OZ :

$$z = z - vt. \quad (2.7)$$

Переконаємося, що

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2H'}{1+H^2}(-v) \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.8)$$

де $H' = \frac{dH}{dP}$, а також

$$\operatorname{div}[(\nabla \varphi) \sin^2 \theta] = \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \sum_i \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin^2 \theta) = \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3}(-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.10)$$

де x_i – декартові координати радіус-вектора.

Виведемо доданки з першого рівняння системи (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(\omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z} - \omega_H \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(-v \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right], \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3}(-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \omega_H}{\partial t} \right) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \\ \cdot (-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3}(-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \cdot \\ \cdot \left(\frac{\partial \omega_H}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial \omega_H}{\partial t} \right) &= \left(\omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z} - \omega_H \right) \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3}(-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \\ + \sin^2 \theta \cdot \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right) &= -v \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3}(-v) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \cdot \\ \cdot \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right) &= v^2 \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \cdot \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Підставимо вирази (2.8) – (2.10) в перше з системи рівнянь (2.3) та отримаємо:

$$c^2 \operatorname{div}(\sin^2 \theta \nabla \varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right) \right] + \frac{\partial \omega_H}{\partial t} = 0,$$

$$c^2 \left\{ \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \sum_i \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right\} - \left\{ v^2 \cdot \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \sin^2 \theta \cdot \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right) \right\}. \quad (2.13)$$

Отримаємо розрахунок формули (2.13) в наступному вигляді:

$$\frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \left(c^2 \Delta Q - v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) + \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \left(c^2 \nabla P \nabla Q - v^2 \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Зробимо розрахунок похідних та функцій для підстановки в друге рівняння з системи рівнянь (2.3). Тоді:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (2.16)$$

$$\Delta \theta = \frac{2H'}{1+H^2} \Delta P + 2 \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) (\nabla P)^2. \quad (2.17)$$

Розглянемо друге рівняння з системи рівнянь (2.3):

$$c^2 \Delta \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left[c^2 (\nabla \varphi)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_H \right)^2 - \omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \right] \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (2.18)$$

Підставимо вирази (2.15) – (2.17) в рівняння (2.18)

$$c^2 \left(\frac{2H'}{1+H^2} \Delta P + 2 \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) (\nabla P)^2 \right) - v^2 \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2 \cdot \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) \cdot v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 - \left[c^2 (\nabla \varphi)^2 - \left(-v \frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 - \omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \right] \cdot \frac{2H}{1+H^2} \cdot \frac{1-H^2}{1+H^2} = 0. \quad (2.19)$$

Зробимо наступні перетворення для отримання розв'язку рівняння (2.18):

$$\begin{aligned} & \frac{2H'}{1+H^2} \left(c^2 \Delta P - v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) \left(c^2 (\nabla P)^2 - v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right) + \\ & + \left\{ \omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) - c^2 \sum_i (\nabla Q)^2 + v^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{2H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Запишемо систему рівнянь (2.3) в розгорнутому вигляді, підставивши отримані розв'язки з рівнянь (2.14) та (2.20) та отримаємо, наступну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \left(c^2 \Delta Q - v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) + \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \\ & \cdot \left(c^2 \nabla P \nabla Q - v^2 \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{2H'}{1+H^2} \left(c^2 \Delta P - v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(c^2 (\nabla P)^2 - v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right) + \left\{ \omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) - \right. \\ & \left. - c^2 \sum_i (\nabla Q)^2 + v^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{2H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

Введемо наступні перетворення:

$$\left\{ \begin{aligned} & \nabla P \nabla Q = 0 \\ & (\nabla P)^2 = 0 \\ & \Delta P = 0 \\ & \Delta Q = 0 \\ & (\nabla P)^2 = (\nabla Q)^2 \end{aligned} \right. . \quad (2.22)$$

Розіб'ємо систему (2.21) на систему рівнянь для функцій P, Q

$$\begin{cases} \nabla P \nabla Q - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \Delta Q - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0 \end{cases}, \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \Delta P - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \\ (\nabla P)^2 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 - \left[\sum_i (\nabla Q)^2 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 \right] = -\frac{\omega_0^2}{c^2} \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \end{cases}. \quad (2.24)$$

Розіб'ємо систему (2.21) на систему рівнянь для функції H

$$\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} = \frac{H(1-H^2)}{(1+H^2)^2}. \quad (2.25)$$

Введемо заміну, коли $v < c$

$$\begin{cases} X = \frac{x}{l_0} \\ Y = \frac{y}{l_0} \\ Z = \frac{z - vt}{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ l_0 = \frac{c}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\left| \frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right|}} \end{cases}. \quad (2.26)$$

Перетворимо рівняння (2.23) – (2.24) та отримаємо:

$$\begin{cases} \nabla P \nabla Q = 0 \\ \Delta Q = 0 \end{cases}, \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} \Delta P = 0 \\ (\nabla P)^2 - (\nabla Q)^2 = -\operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \end{cases}. \quad (2.28)$$

Введемо заміну, коли $v > c$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{x}{l_0} \\ Y = \frac{y}{l_0} \\ Z = \frac{z - vt}{l_0 \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}} \\ l_0 = \frac{c}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\left| \frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right|}} \end{array} \right. . \quad (2.29)$$

Перетворимо рівняння (2.23) – (2.24) та отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla P \nabla Q = 0 \\ \Delta Q = 0 \end{array} \right. , \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta P = 0 \\ (\nabla P)^2 - (\nabla Q)^2 = \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right) \end{array} \right. . \quad (2.31)$$

Запишемо умови Коші-Рімана для функції P , Q :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial Q}{\partial Y} \\ \frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{\partial Q}{\partial X} \end{array} \right. , \quad (2.32)$$

Двовимірний оператор Лапласа, що діє на функції P , Q , дає тотожно нуль:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} = 0 \end{array} \right. . \quad (2.33)$$

Аналогічно з умов Коши-Рімана (2.32) можна отримати наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)^2 \end{cases} \quad (2.34)$$

Тоді система перетворень (2.27) – (2.29) спрощується і отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Q}{\partial Z} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = 0 \end{cases}, \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} = 0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial Z}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)^2 = -\operatorname{sgn}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1\right)\right] \end{cases} \quad (2.36)$$

Виберемо функції $P(X, Y, Z)$ та $Q(X, Y, Z)$ у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} P(X, Y, Z) &= Z\Theta\left[-\left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] + f(X, Y) \\ Q(X, Y, Z) &= Z\Theta\left[\left(\frac{d^2}{\delta} + \beta_1\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] + g(X, Y) \end{aligned} \quad (2.37)$$

де $f(X, Y)$ та $g(X, Y)$ – спряжені гармонічні функції.

Перетворимо рівняння (2.25) для функції H :

$$\begin{aligned} \frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} &= \frac{H(1-H^2)}{(1+H^2)^2}, \\ \frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} - \frac{H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} &= 0 \\ \frac{H''(1+H^2) - 2HH'^2 - H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} (1+H^2)^2 \neq 0 \\ H''(1+H^2) - 2HH'^2 - H(1-H^2) = 0 \end{cases}$$

$$(2.39)$$

Зробимо заміну змінних та функції в диференціальному рівнянні (2.39):

$$H' = V = \frac{dH}{dP}, \quad (2.40)$$

$$H'' = \frac{d^2 H}{dP^2} = \frac{dV}{dP} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{dP} = \frac{dV}{dH} V. \quad (2.41)$$

Підставимо заміну (2.40) – (2.41) в рівняння (2.39) та отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$(1 + H^2) V \frac{dV}{dH} - 2HV^2 - H(1 - H^2) = 0. \quad (2.42)$$

Зробимо наступні перетворення для отримання загального розв'язку:

$$V \frac{dV}{dH} = \frac{1}{2} \frac{d}{dH} (V^2). \quad (2.43)$$

Нехай $V^2 = \Phi$, тоді рівняння (2.42) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + H^2) \frac{d\Phi}{dH} - 2H\Phi - H(1 - H^2) &= 0 \\ \frac{1}{2} (1 + H^2) \frac{d\Phi}{dH} - 2H\Phi &= H(1 - H^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Розглянемо праву частину рівняння (2.44) за методом варіацій у наступному вигляді:

$$\frac{1}{2} (1 + H^2) d\Phi = 2H\Phi dH. \quad (2.45)$$

Проінтегруємо рівняння (2.45)

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\Phi}{\Phi} &= \int \frac{2HdH}{\frac{1}{2}(1+H^2)} \\
\ln \Phi &= \int \frac{\frac{2}{1}d(1+H^2)}{\frac{1}{2}(1+H^2)} \\
\ln \Phi &= 2\ln(1+H^2) + \ln C_1 \\
\ln \Phi &= 2\ln[C_1(1+H^2)] \\
\Phi_{одн.} &= C_1^2(1+H^2)^2 \\
\Phi_{неодн.} &= C(H)(1+H^2)^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Перейдемо до еліптичних функцій Якобі, щоб отримати розв'язок рівняння (2.45), отримаємо:

$$P(X, Y, Z) = \int \frac{\pm dH}{\sqrt{H^2 + C(1+H^2)^2}}. \tag{2.47}$$

Якщо $-\frac{1}{4} < C < 0$, то рівняння (2.47) можна перетворити до наступного виразу:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{dn\left(a\sqrt{|C|} \cdot P(X, Y, Z), k_1\right)}, \tag{2.48}$$

де

$$a = \sqrt{\frac{1+2C+\sqrt{1+4C}}{2|C|}}, \quad b = \sqrt{\frac{1+2C-\sqrt{1+4C}}{2|C|}},$$

$0 < k_1 \leq 1$ – модуль еліптичної функції,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+4C}}{1+2C+\sqrt{1+4C}}}.$$

Для випадку $C > 0$ було отримано наступний розв'язок:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}\left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k\right)}{1 + \operatorname{sn}\left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k\right)}}, \quad (2.49)$$

де

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + 4C}},$$

$0 < k \leq 1$ - абсолютне значення еліптичної функції.

В полярних координатах функції P та Q можна записати наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X, Y) = \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \frac{2}{\pi} k_2 \cdot K(k_2) \sum_i \tilde{n}_i \alpha_i + C_2 + \\ + \sum_i \sum_n \frac{A_n^{(i)}}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|^n} (B_n^{(i)} \cos n\alpha_i + C_n^{(i)} \sin n\alpha_i) \\ Q(X, Y) = -\frac{2}{\pi} k_2 \cdot K(k_2) \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \sum_i \alpha_i \tilde{n}_i + C_3 + \\ + \sum_i \sum_n \frac{A_n^{(i)}}{|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|^n} (C_n^{(i)} \cos n\alpha_i - B_n^{(i)} \sin n\alpha_i) \end{array} \right., \quad (2.50)$$

де \vec{r}_{0i} - двовимірний вектор з координатами в площині YOX , яка перпендикулярна напрямку поширення нелінійної спінової хвилі, $\vec{r}_{0i} = (X_{0i}, Y_{0i})$

X_{0i}, Y_{0i} - безрозмірні константи, $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{Y - Y_{0i}}{X - X_{0i}}$, $i, n, \tilde{n}_i, \tilde{\tilde{n}}_i$ - це цілі числа,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \\ K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \end{array} \right. . \quad (2.51)$$

Зазначимо, що функція $P(X, Y)$ в (2.48) являє собою розкладання в степеневий ряд по $|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|$ довільної гармонічної функції двох змінних X та Y , а вираз для функції $Q(X, Y)$ в (2.48) являє собою розкладання в степеневий ряд

по $|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|$ гармонічної функції двох змінних X та Y , який зв'язаний з функцією $P(X, Y)$. Це означає, що функції $P(X, Y)$ та $Q(X, Y)$ пов'язані між собою за допомогою умов Коші-Рімана, а також є власними функціями двовимірного оператора Лапласа.

2.2 Енергія скіrmіонподібного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці

Розрахуємо енергію антиферомагнетика у вигляді формули (2.1) для цього запишемо компоненти вектора намагніченості:

$$\begin{cases} m_x = \frac{h_0}{\omega_h \delta} \left\{ \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} - \frac{d}{\delta} \sin \theta \sin \varphi - \frac{h_0}{\delta} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ m_y = -\frac{h_0}{\omega_h \delta} \left\{ \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} + \frac{d}{\delta} \sin \theta \cos \varphi - \frac{h_0}{\delta} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi. \\ m_z = \frac{h_0}{\delta} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{\omega_h} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (2.52)$$

Тоді як функція φ має вигляд:

$$\varphi = \omega_h t + Q.$$

Тоді частинна похідна по часу та координаті z дорівнює відповідно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_h - \nu \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \end{cases} . \quad (2.53)$$

Підставимо вираз (2.53) у вираз (2.52) та отримаємо:

$$\begin{cases} m_x = \frac{h_0}{\omega_h \delta} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{d}{\delta} \sin \theta \sin \varphi \\ m_y = -\frac{h_0}{\omega_h \delta} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{d}{\delta} \sin \theta \cos \varphi \\ m_z = 0 \end{cases} . \quad (2.54)$$

Порахуємо енергію однорідного обміну. Для цього розрахуємо

$$\vec{m}^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2,$$

$$\vec{m}^2 = \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \omega_h^2 \right\} + \frac{d^2}{\delta^2} \sin^2 \theta + \frac{h_0^2}{\delta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta -$$

$$- \frac{2dh_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{2h_0^2}{\omega_h \delta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \omega_h$$

$$\vec{m}^2 = \frac{h_0^2}{\omega_h^2 \delta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{h_0^2}{\omega_h^2 \delta^2} \cdot \omega_h^2 - \frac{2h_0^2}{\omega_h \delta^2} \cdot \omega_h \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{h_0^2}{\delta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta +$$

$$+ \frac{d^2}{\delta^2} \sin^2 \theta - \frac{2dh_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\vec{m}^2 = \frac{h_0^2}{\omega_h^2 \delta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{h_0^2}{\delta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{h_0^2}{\delta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{d^2}{\delta^2} \sin^2 \theta - \frac{2dh_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$\vec{m}^2 = \frac{h_0^2}{\omega_h^2 \delta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{d^2}{\delta^2} \sin^2 \theta - \frac{2dh_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} . \quad (2.55)$$

Знайдемо похідні від компонент вектора антиферромагнетизму:

$$\begin{cases} \frac{\partial l_x}{\partial x_i} = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial l_y}{\partial x_i} = \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial l_z}{\partial x_i} = -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \end{cases} \quad (2.56)$$

Порахуємо квадрат похідних з системи рівнянь (2.56):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial l_x}{\partial x_i} \right)^2 = \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - 2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \\ \left(\frac{\partial l_y}{\partial x_i} \right)^2 = \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + 2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \\ \left(\frac{\partial l_z}{\partial x_i} \right)^2 = \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \end{cases}$$

Розрахуємо квадрат градієнта вектора антиферромагнетизму:

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{l})^2 &= \left(\frac{\partial l_x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial l_y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial l_z}{\partial x_i} \right)^2 = \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 = \\ &= (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Знайдемо похідні від компонент вектора намагніченості з рівняння (2.54):

$$\begin{cases}
\frac{\partial m_x}{\partial x_i} = \frac{h_0}{\omega_h \delta} \left\{ \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{d}{\delta} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{d}{\delta} \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \\
- \frac{h_0}{\delta} \cos 2\theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \\
\frac{\partial m_y}{\partial x_i} = -\frac{h_0}{\omega_h \delta} \left\{ -\sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{d}{\delta} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{d}{\delta} \sin \theta \cdot \\
\cdot \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{h_0}{\delta} \cos 2\theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \\
\frac{\partial m_z}{\partial x_i} = 0
\end{cases} \quad (2.58)$$

Порахуємо квадрат похідних з системи рівнянь (2.58):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial m_x}{\partial x_i} \right)^2 &= \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{h_0}{\delta} \right)^2 \\
&\cdot \cos^2 2\theta \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \sin^2 \varphi \cdot \\
&\cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right)^2 + \frac{2h_0}{\omega_h \delta} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \frac{2h_0 d}{\omega_h \delta^2} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \\
&\cdot \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{2h_0 d}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{2h_0^2}{\omega_h \delta^2} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \\
&\cos 2\theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{2d}{\delta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{2d}{\delta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \cdot \\
&\cdot \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{2h_0}{\delta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \cdot \cos 2\theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2d^2}{\delta^2} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cdot \\
&\cdot \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{2h_0 d}{\delta^2} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cos 2\theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2h_0 d}{\delta^2} \cdot \sin \theta \cos \varphi \cdot \\
&\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos 2\theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial m_y}{\partial x_i}\right)^2 &= \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta}\right)^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta}\right)^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)\right)^2 + \\
&+ \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{\delta}\right)^2 \cos^2 2\theta \cdot \\
&\cdot \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2h_0}{\omega_h \delta} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) - \frac{2d}{\delta} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos \theta \cdot \\
&\cdot \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2d}{\delta} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{2h_0}{\delta} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos 2\theta \sin \varphi \cdot \\
&\cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2d}{\delta} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) - \frac{2h_0}{\delta} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) \cos 2\theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{2d^2}{\delta^2} \cos \theta \cdot \\
&\cdot \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{2h_0 d}{\delta^2} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cdot \cos 2\theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2h_0 d}{\delta^2} \sin \theta \cdot \\
&\cdot \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos 2\theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Розрахуємо квадрат градієнта вектора намагніченості:

$$\begin{aligned}
(\nabla \vec{m})^2 &= \left(\frac{\partial m_x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \\
&+ \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2h_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 - \\
&- \frac{2h_0 d}{\omega_h \delta^2} \cos \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)
\end{aligned} \quad (2.59)$$

Візьмемо, що $l_z^2 = \cos^2 \theta$, $m_z^2 = 0$, вектор Дзялошинського-Морія паралельний осі Oz та зовнішньому магнітному полі $\vec{m} \cdot \vec{h}_0 = 0$. Після даного введення розрахуємо густину енергії Дзялошинського-Морія:

$$w = \vec{d} \left[\vec{m} \times \vec{l} \right],$$

$$\begin{aligned}
\vec{d} \times [\vec{m} \times \vec{l}] &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & d \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{vmatrix} = dm_x l_y - dm_y l_x = d \left\{ \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{d}{\delta} \sin \theta \cdot \right. \right. \\
&\cdot \sin \varphi - \left. \left(-\frac{h_0}{\omega_h \delta} \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{d}{\delta} \sin \theta \cos \theta \right) \sin \theta \cos \varphi \right\} = d \left\{ \frac{h_0}{\omega_h \delta} \sin^2 \varphi \cdot \right. \\
&\cdot \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{d}{\delta} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{h_0}{\omega_h \delta} \cos^2 \varphi \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{d}{\delta} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left. \right\} = \\
&= d \left\{ \frac{h_0}{\omega_h \delta} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{d}{\delta} \sin^2 \theta \right\}
\end{aligned} \quad (2.60)$$

Знайдемо енергію антиферомагнетика, підставивши попередні розрахунки у вираз (2.1):

$$\begin{aligned}
W &= M_0^2 \int dV \left\{ \frac{h_0^2}{2\omega_h^2 \delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{d}{2} \sin^2 \theta - \frac{dh_0}{\omega_h} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} (\nabla \theta)^2 + \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 + \right. \\
&+ \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right)^2 + \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \cos^2 \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \\
&+ \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\alpha' h_0 d}{\omega_h \delta^2} \cos \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + \\
&+ \left. \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \theta + \frac{dh_0}{\omega_h \delta} \sin \theta - \frac{d^2}{2} \sin^2 \theta \right\}.
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Згрупуємо компоненти з рівняння (2.61) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
W &= M_0^2 \int dV \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left[\delta + \alpha' (\nabla \varphi)^2 \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_h \delta^2} \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \cdot \right. \\
&\cdot \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 (\nabla \theta)^2 \right) \cos^2 \theta + \frac{\alpha}{2} (\nabla \theta)^2 + \frac{\alpha'}{2} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right]^2 - \frac{\alpha' h_0 d}{\omega_h \delta^2} \cos \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left. \right\}.
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Підставимо заміну $\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial z}$, тоді

$$\begin{aligned}
W = M_0^2 \int dV & \left\{ \frac{v^2}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_H \delta} \right)^2 \left[\delta + \alpha' (\nabla \varphi)^2 \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} (\nabla \theta)^2 - \frac{v^2 \alpha' h_0}{\omega_H \delta^2} \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& \cdot (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 (\nabla \theta)^2 \right) \cos^2 \theta + \frac{v^2 \alpha'}{2} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{h_0}{\omega_H \delta} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right]^2 - \frac{v \alpha' h_0 d}{\omega_H \delta^2} \cos \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \left. \right\}. \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Застосуємо заміни:

$$\left\{ \begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{1 - H^2}{1 + H^2} \\
\sin \theta &= \pm \frac{2H}{1 + H^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z} = \omega_H \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{2H'}{1 + H^2} (-v) \frac{\partial P}{\partial z} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= \frac{2H'}{1 + H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial Q}{\partial x_i} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} &= \frac{2H'}{1 + H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} + 2 \left(\frac{H''}{1 + H^2} - \frac{2HH'^2}{(1 + H^2)^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2 \right) \\
\frac{\partial}{\partial t} &= -v \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \right. \quad (2.64)$$

та отримаємо енергію у вигляді:

$$\begin{aligned}
W = M_0^2 \int dV & \left\{ \frac{v^2}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left[\delta + \alpha' (\nabla Q)^2 \right] \left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\nabla P)^2 - \right. \\
& - \frac{v^2 \alpha' h_0}{\omega_\mu \delta^2} \frac{2H}{1+H^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 (\nabla Q)^2 + \frac{1}{2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\nabla Q)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\nabla P)^2 \right) \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right)^2 + \frac{v^2 \alpha'}{2} \cdot \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \right]^2 - \\
& - \frac{v \alpha' h_0 d}{\omega_\mu \delta^2} \frac{1-H^2}{1+H^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right] \Bigg\} \\
W = M_0^2 \int dV & \left\{ \frac{v^2}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left[\delta + \alpha' (\nabla Q)^2 \right] \left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \cdot \right. \\
& \cdot (\nabla P)^2 - \frac{v^2 \alpha' h_0}{\omega_\mu \delta^2} \frac{2H}{1+H^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 (\nabla Q)^2 + \frac{1}{2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\nabla Q)^2 + \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\nabla P)^2 \right) \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right)^2 + \\
& + \frac{v^2 \alpha'}{2} \cdot \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \right]^2 - \frac{v \alpha' h_0 d}{\omega_\mu \delta^2} \frac{1-H^2}{1+H^2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2 \right] \Bigg\}
\end{aligned} \quad (2.65)$$

Формула (2.65) описується для автомобельного скіріміонподібних розв'язків рівняння Ландау Ліфшица в циліндричній антиферромагнітній нанооболонці, при застосуванні таких умов:

$$\begin{cases} R_c = r_0 \\ R_{sk} = r_0 e^{N \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} - \ln R_c} \end{cases}, \quad (2.66)$$

де R_c - внутрішній радіус скіріміона, R_{sk} - зовнішній радіус скіріміона, N - топологічне число, відповідно для скіріміона $N=3$, для скіріміоніума $N=4$, а для зв'язаних станів скіріміона та скіріміоніума $N=5$.

Для того щоб побудувати аналітичну модель скіріміону та його зв'язаних станів, потрібно використати умову, що $R_c < r < R_{sk}$.

Введемо нормовані координати та розкладемо енергію (2.65) в ряд по малому параметру $\frac{v}{c}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l_0 X \\ y = l_0 Y \\ z = l_0 Z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ l_0 = \frac{c}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\left| \frac{d^2}{\delta} + \beta_1 \right|}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial Z} \approx \frac{1}{l_0} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \\ dx dy dz = l_0^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx l_0^3 dX dY dZ \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Тоді різниця енергії при швидкості v та при швидкості $v=0$ з виразу (2.65) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} W|_v - W|_{v=0} \approx M_0^2 v^2 \int l_0^3 dX dY dZ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{2l_0^2} \cdot \frac{1}{2c^2} (\nabla' \theta)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha' h_0}{\omega_\mu \delta^2 l_0^2} \sin \theta \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 (\nabla' \varphi)^2 + \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \sin^2 \theta (\nabla' \varphi)^2 \frac{1}{2c^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} (\nabla' \theta)^2 \right) \cos^2 \theta \frac{1}{2c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_\mu \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Введемо заміну:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \varphi = \tilde{\alpha} \\ P = \ln \frac{\tilde{r}}{r_0} \end{array} \right.,$$

де $r_0 = \text{const}$; $r = (X; Y)$.

Коли $v \neq 0$, тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla' \varphi)^2 = (\nabla' Q)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \tilde{r}} \vec{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}} \vec{e}_{\tilde{\alpha}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{r}^2} = \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}_i} \\ (\tilde{\nabla} P)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} \vec{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial P}{\partial \tilde{\alpha}} \vec{e}_{\tilde{\alpha}} \right)^2 = \left(\frac{r_0}{\tilde{r}} \frac{1}{r_0} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{r}^2} = \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \\ (\tilde{\nabla} \theta)^2 = \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 (\tilde{\nabla} P)^2 = \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \\ \sin \theta = \frac{2H}{1+H^2} \\ \sin^2 \theta = \frac{4H}{(1+H^2)^2} \\ \cos \theta = \frac{1-H^2}{1+H^2} \\ \cos^2 \theta = \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right)^2 \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Підставимо заміни (2.69) у вираз (2.68) та отримаємо:

$$\begin{aligned} W|_v - W|_{v=0} \approx M_0^2 v^2 \int l_0^3 dX dY dZ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_{\#} \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{2l_0^2} \cdot \frac{1}{2c^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha' h_0}{\omega_{\#} \delta^2 l_0^2} \frac{2H}{1+H^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \frac{4H}{(1+H^2)^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \right) \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right)^2 \frac{1}{2c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_{\#} \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W|_v - W|_{v=0} &\approx M_0^2 v^2 \frac{l_0^4}{4} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{2l_0^2} \cdot \frac{1}{2c^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_\# \delta^2 l_0^2} \frac{2H}{1+H^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \cdot \\
&\cdot \frac{4H}{(1+H^2)^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \left(\frac{2H'}{1+H^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \right) \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right)^2 \cdot \\
&\cdot \frac{1}{2c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \left. \right\} \int_0^{2\pi} d\tilde{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Тоді $H = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - sn\left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k\right)}{1 + sn\left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k\right)}}$ підставимо у вираз (2.70) та

отримаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
W|_v - W|_{v=0} &\approx M_0^2 v^2 \frac{l_0^4}{4} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{2l_0^2} \cdot \frac{1}{2c^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left(\frac{2H'}{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_h \delta^2 l_0^2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}}{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \right) \right. \\
&\cdot \left. \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \right) \frac{4 \cdot \frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}}{\left(\frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2} \frac{1}{2c^2} + \right. \\
&\cdot \left. \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \frac{2H'}{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \right) \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k}, k \right)} \right)^2 \right. \\
&\cdot \left. \frac{1}{2c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \right\} + \int_0^{2\pi} d\tilde{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Спростивши вираз (2.71) отримаємо його в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
W|_v - W|_{v=0} &\approx M_0^2 v^2 \pi \frac{l_0^4}{2} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{4 l_0^2 c^2 \tilde{r}^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left(H' \left(1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right) \right) \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_\# \delta^2 l_0^2} \cdot \left(1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right) \right) \cdot \\
&\left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn} \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right)}{1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right)}} \right) \left(\left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2 l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2 c^2} \cdot \right. \right. \\
&\left. \left. \cdot \left(1 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \right) \left(H' \left(1 + \operatorname{sn} \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right) \right) \right)^2 \cdot \right. \\
&\left. \cdot \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \left(\frac{P(X, Y, Z)}{k}, k \right) \cdot \frac{1}{2 c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Оскільки $P = \ln \frac{\tilde{r}}{r_0}$, тоді у вираз (2.72) підставимо дану заміну та отримаємо:

$$\begin{aligned}
W|_v - W|_{v=0} &\approx M_0^2 v^2 \pi \frac{l_0^4}{2} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left[\delta + \frac{\alpha'}{l_0^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{4 l_0^2 c^2 \tilde{r}^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left(H' \left(1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right)^2 - \frac{\alpha' h_0}{\omega_\# \delta^2 l_0^2} \cdot \left(1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \cdot \left(\frac{1 - sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right)}{1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right)} \right) \right) \\
&\cdot \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2 l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2 c^2} \cdot \left(1 - sn^2 \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \right) \left(H' \left(1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 sn^2 \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \cdot \\
&\cdot \left. \frac{1}{2 c^2} + \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_\# \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Зробимо заміну

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial z} \\
\frac{\partial \theta}{\partial z'} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial z'} \\
\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x_i} + 2 \cdot \left(\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \\
u = \left(\frac{\ln \frac{r}{\tilde{r}_0}}{k}, k \right) \\
H = \sqrt{\frac{1-snu}{1+snu}} = \left(\frac{1-snu}{1+snu} \right)^{-1/2} \\
\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} = 0 \\
\frac{\partial' \theta}{\partial z} = 0 \\
H' = \frac{1}{2} \left(\frac{1-snu}{1+snu} \right)^{-1/2} \cdot \frac{[-cnudnu(1+snu) - cnudnu(1-snu)]}{(1+snu)^2} = \\
= \frac{(1-snu)^{-1/2} [2cnudnu]}{2(1+snu)^{3/2}} = \frac{(1-snu)^{-1/2} [cnudnu]}{(1+snu)^{3/2}}
\end{array} \right. \quad (2.74)$$

З рівняння (2.70) візьмемо доданки в яких присутні $\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i}$, $\frac{\partial' \theta}{\partial z}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_1 = \frac{\alpha' h_0}{\omega_{\#} \delta^2 l_0^2} \frac{2H}{1+H^2} \left(\frac{\partial' \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \\
a_2 = \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_{\#} \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial'^2 \theta}{\partial z \partial x_i} \right)^2
\end{array} \right. \quad (2.75)$$

Застосуємо заміни (2.74) та спростимо вираз (2.75)

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\alpha' h_0}{\omega_h \delta^2 l_0^2} \frac{2H}{1+H^2} \cdot 0 \cdot \left(\frac{1}{\tilde{r}}\right)^2 = 0 \\ a_2 = \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1}{l_0} \left(\frac{h_0}{\omega_h \delta}\right)^2 \cdot 0 = 0 \end{cases} . \quad (2.76)$$

Вирази (2.74) та (2.76) підставимо в рівняння (2.73) та отримаємо:

$$\begin{aligned} W|_{\nu} - W|_{\nu=0} &\approx M_0^2 v^2 \pi \frac{l_0^4}{4} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left[\frac{\alpha}{4l_0^2 c^2 \tilde{r}^2} \cdot \left(H' \left(1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} \cdot \left(1 - sn^2 \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \right) \cdot \\ &\cdot \left. \left(H' \left(1 + sn \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right) \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} sn^2 \left(\frac{\ln \frac{\tilde{r}}{r_0}}{k}, k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

Підставимо заміну H' з виразу (2.74) та підставимо у вираз (2.77)

$$\begin{aligned} W|_{\nu} - W|_{\nu=0} &\approx M_0^2 v^2 \pi \frac{l_0^4}{4} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left[\frac{\alpha}{4l_0^2 c^2 \tilde{r}^2} \cdot \left(\frac{(1-snu)^{-1/2} [cnudnu]}{(1+snu)^{3/2}} (1+snu) \right)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{2l_0^2} \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} \cdot \left(1 - sn^2 \left(\frac{u}{k}, k \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \frac{1}{l_0^2} \right) \cdot \\ &\cdot \left. \left(\frac{(1-snu)^{-1/2} [cnudnu]}{(1+snu)^{3/2}} (1+snu) \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \frac{1}{2c^2} sn^2 u \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

Спростимо вираз (2.78) до наступного вигляду та отримаємо різницю енергії рухомого та нерухомого розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній антиферромагнітній нанооболонці:

$$W|_v - W|_{v=0} \approx \frac{l_0^2 M_0^2 v^2 \pi}{16} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left[\frac{\alpha}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{(cnudnu)^2}{1-snu} \sqrt{1+snu} + \right. \\ \left. + \left(\alpha + \alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 (1-sn^2u) \right) + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \left(\alpha' \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 sn^2u \frac{(cnudnu)^2}{1-snu} \sqrt{1+snu} \right) \right] . \quad (2.79)$$

З виразу (2.79) отримаємо різницю енергії рухомого та нерухомого розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці:

$$W|_v - W|_{v=0} \approx \frac{\pi \alpha l_0^2 M_0^2 v^2}{16} \int_0^{L_z} dZ \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \left[\frac{1}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{(cnudnu)^2}{1-snu} \sqrt{1+snu} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 (1-sn^2u) \right) + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 sn^2u \frac{(cnudnu)^2}{1-snu} \sqrt{1+snu} \right) \right] . \quad (2.80)$$

Тоді коефіцієнт $\frac{v^2}{2}$ у формулі (2.80) можна розглядати, як ефективну масу розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці.

2.3 Аналіз залежності енергії скіrmіонподібних розв’язків рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці від параметрів системи

Проаналізувавши енергію скіrmіонподібного розв’язку рівняння Ландау-Ліфшица в циліндричних координатах, бачимо що скіrmіонні структури існують в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки, володіють ефективною масою при рівномірному поступальному русі і зазнають Лоренц-подібної деформації їх форми при великих швидкостях руху. В результаті для окремих скіrmіонів та їх ансамблів може бути застосований квазічастинковий опис (рівняння Тіля) і самі скіrmіони в антиферомагнітній нанооболонці є перспективними носіями інформації в пристроях нанoeлектроніки.

Розглянемо залежність проекції вектора антиферомагнетизму та намагніченості для скіrmіона на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферомагнітної нанооболонки (Рис.2.1 – Рис.2.2)

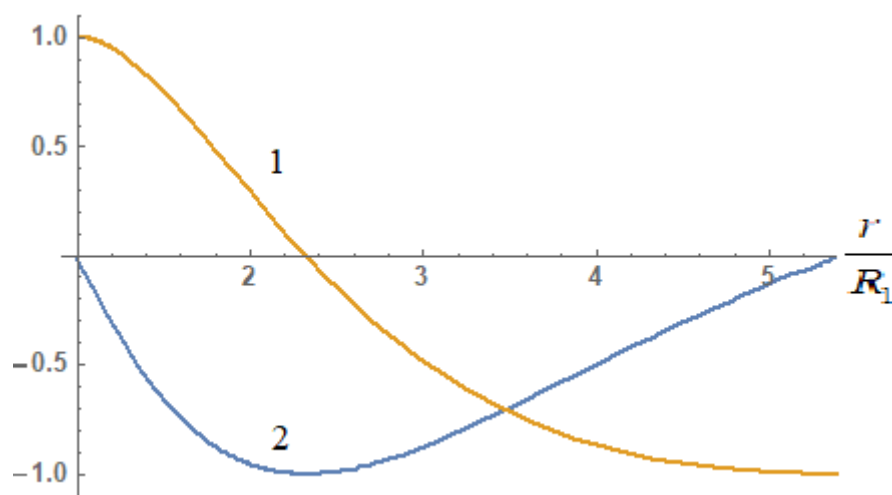


Рис. 2.1 Залежність проекції вектора \vec{l} для скіrmіона на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферомагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки.

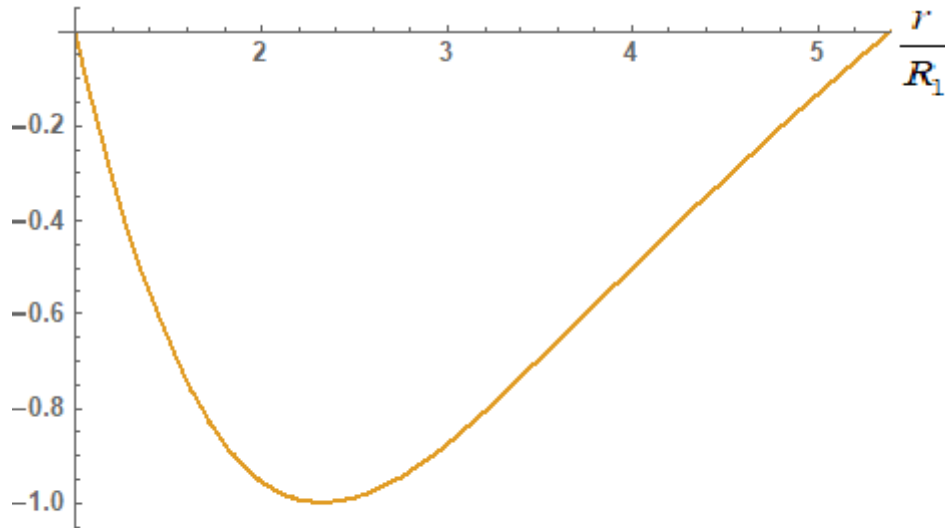


Рис. 2.2 Залежність проекції вектора \vec{m} для скіrmіона на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферомагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки.

Розглянемо векторне поле для вектора намагніченості та антиферомагнетизму для скіrmіона в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки (Рис.2.3-2.4)

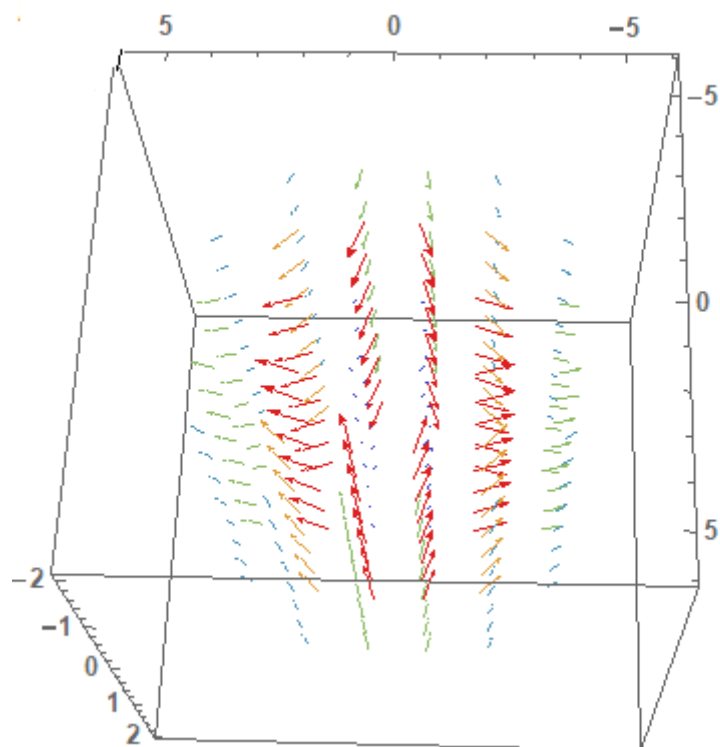


Рис.2.3 Векторне поле для вектора \vec{m} для скіріміона в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$ за формулою (2.54), з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

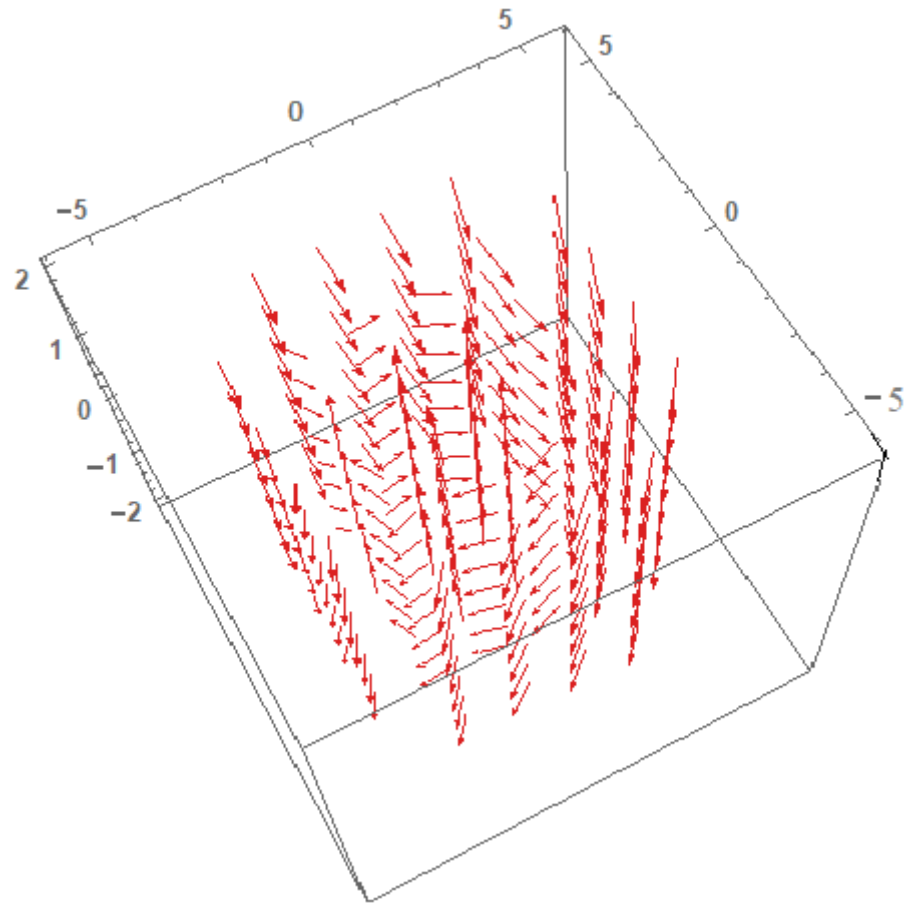


Рис.2.4 Векторне поле для вектора \vec{l} для скіrmіона в антиферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$ за формулою (2.2), з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

Розглянемо схематичне зображення проекції вектора намагніченості та антиферромагнетизму на площину XOY для скіrmіона (Рис.2.5 - 2.6)

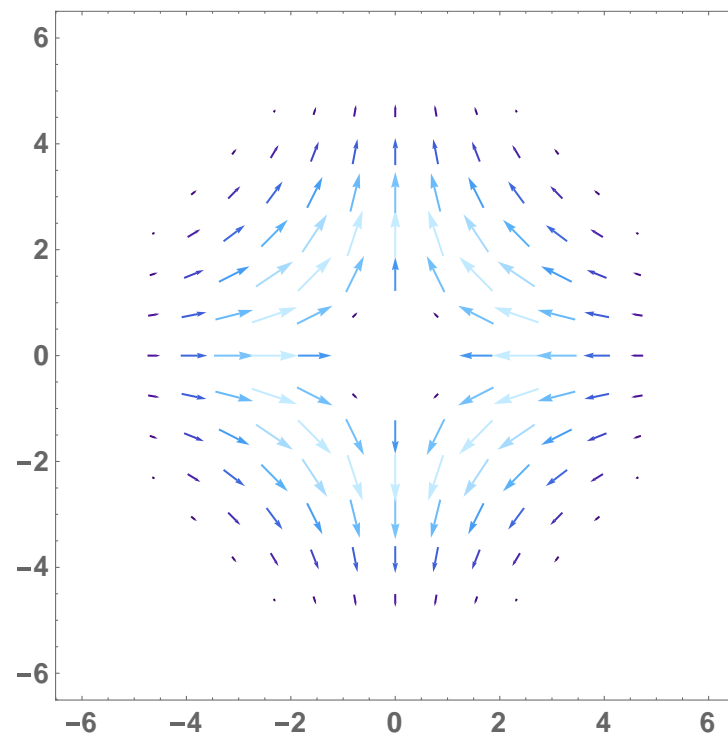


Рис.2.5 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{m} для скіrmіона на площину XOY за формулою (2.54) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 6 \text{ нм}$.

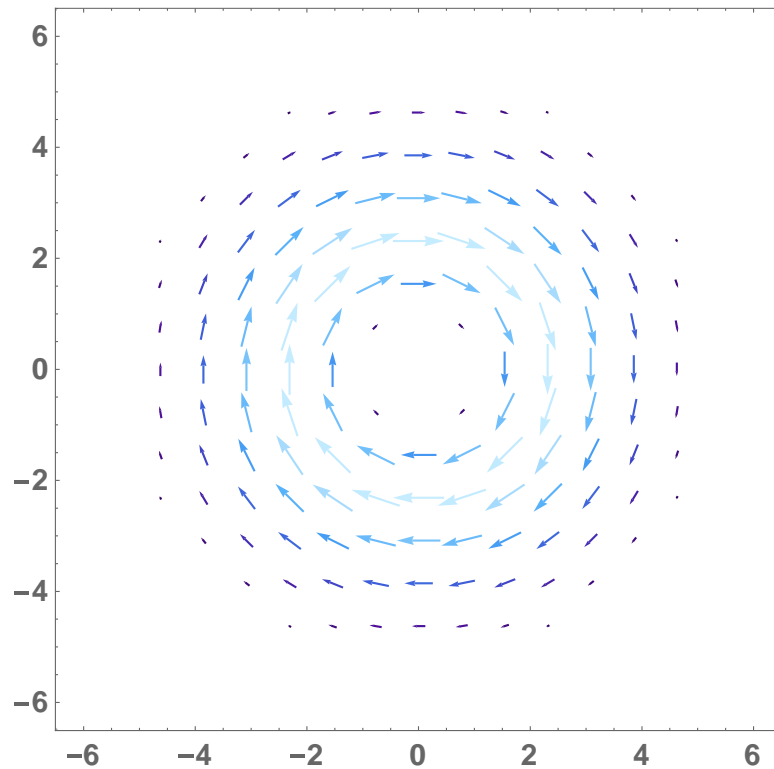


Рис.2.6 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{l} для скіrmіона на площину XOY за формулою (2.2) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$ з

урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$,

$$\delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 6 \text{ нм}.$$

Розглянемо різницю поверхневої густини енергії для рухомого та нерухомого скіrmіона в антиферромагнітній циліндричній нанооболонці (Рис.2.7)

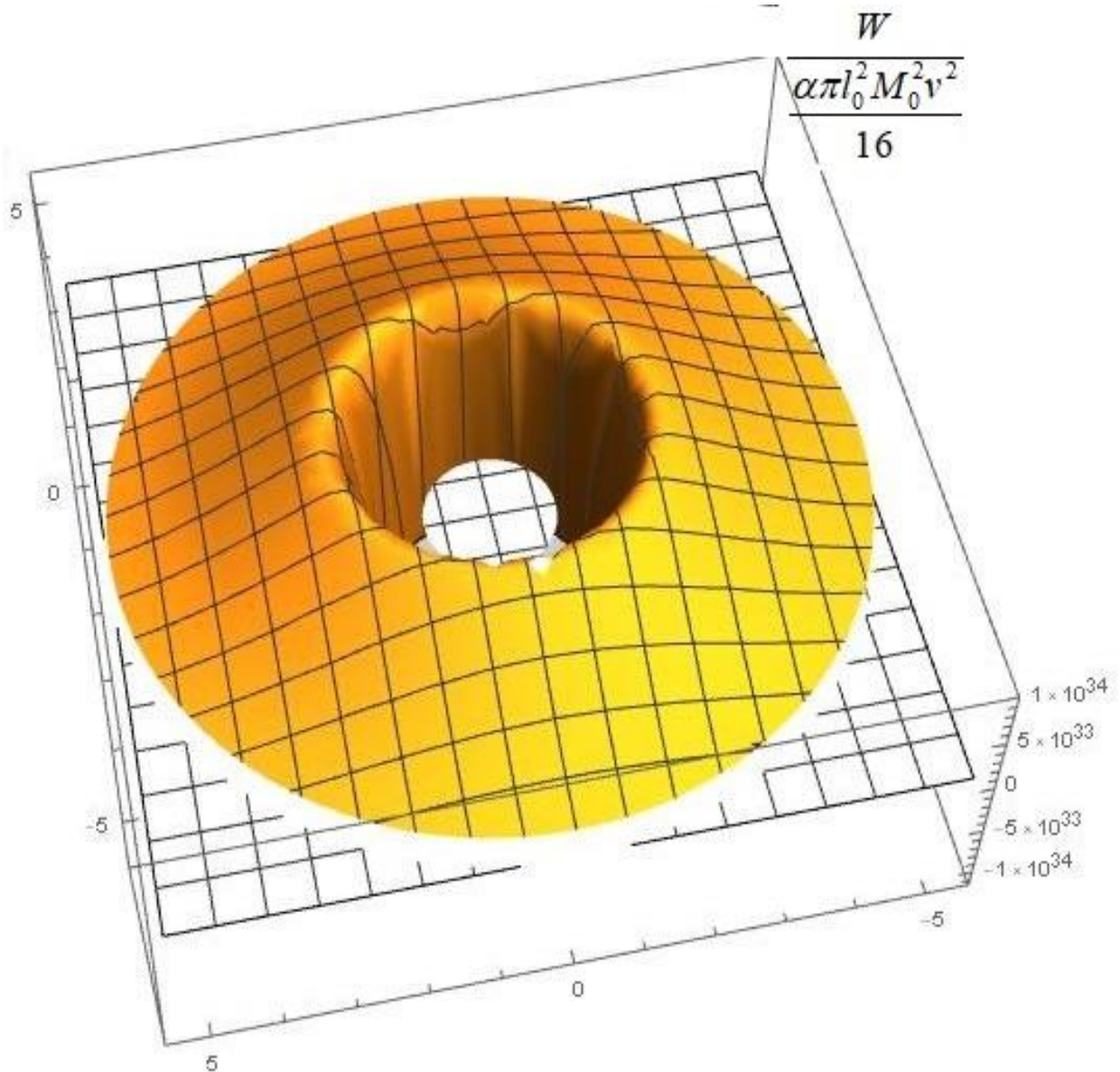


Рис.2.7 Різниця поверхневої густини енергії для рухомого та нерухомого скіrmіона поділено на $\frac{W}{\frac{\pi \alpha l_0^2 M_0^2 v^2}{16}}$ в формі антиферомагнітної циліндричної

нанооболонки за формулою (2.79), з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\alpha' \approx 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$,

$$\delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 5 \text{ нм}.$$

Розглянемо векторне поле для вектора намагніченості та антиферомагнетизму для скіrmіоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки (Рис.2.8 – 2.9)

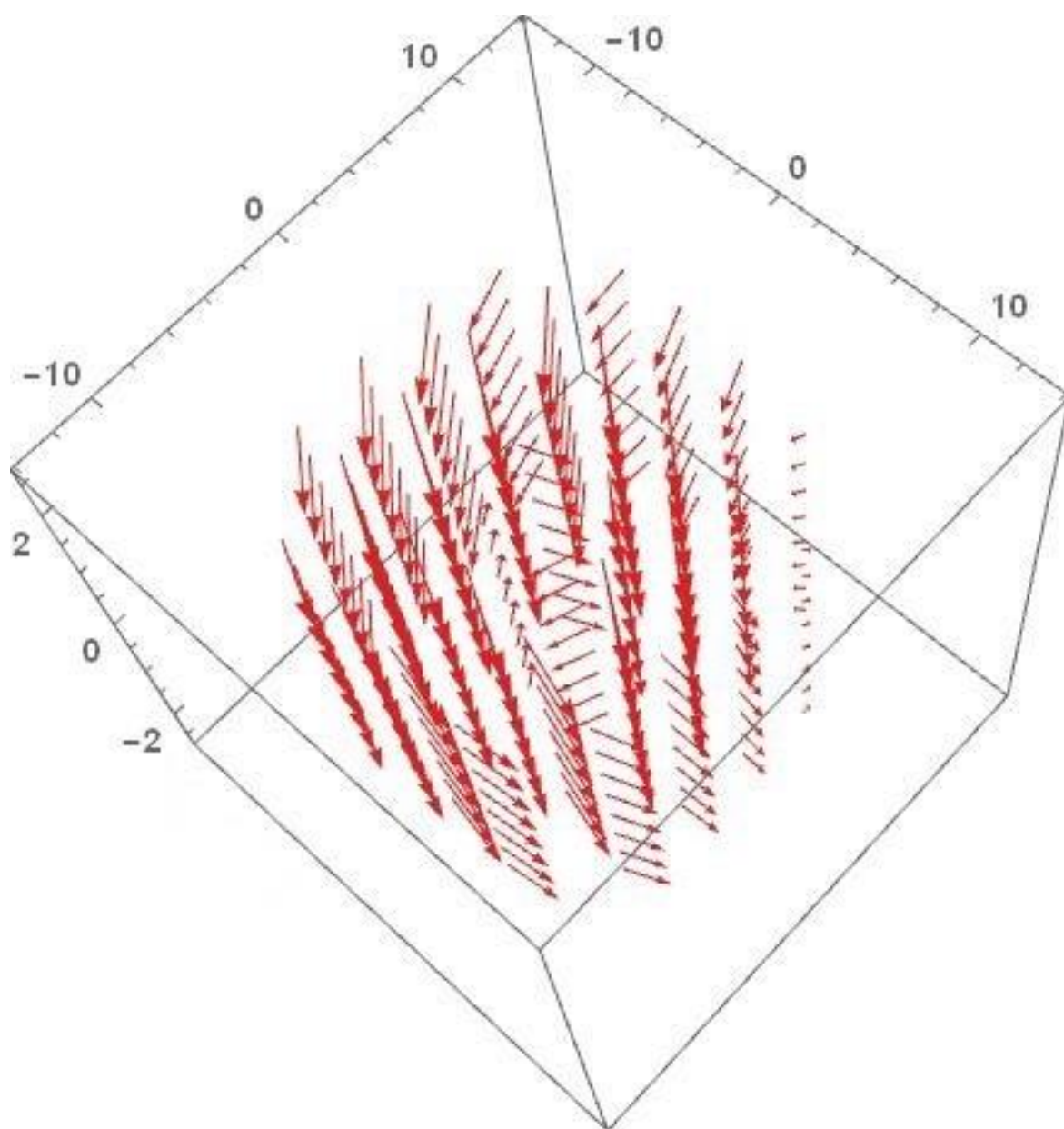


Рис.2.8 Векторне поле для вектора \vec{l} для скірміоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, за формулою (2.2), з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

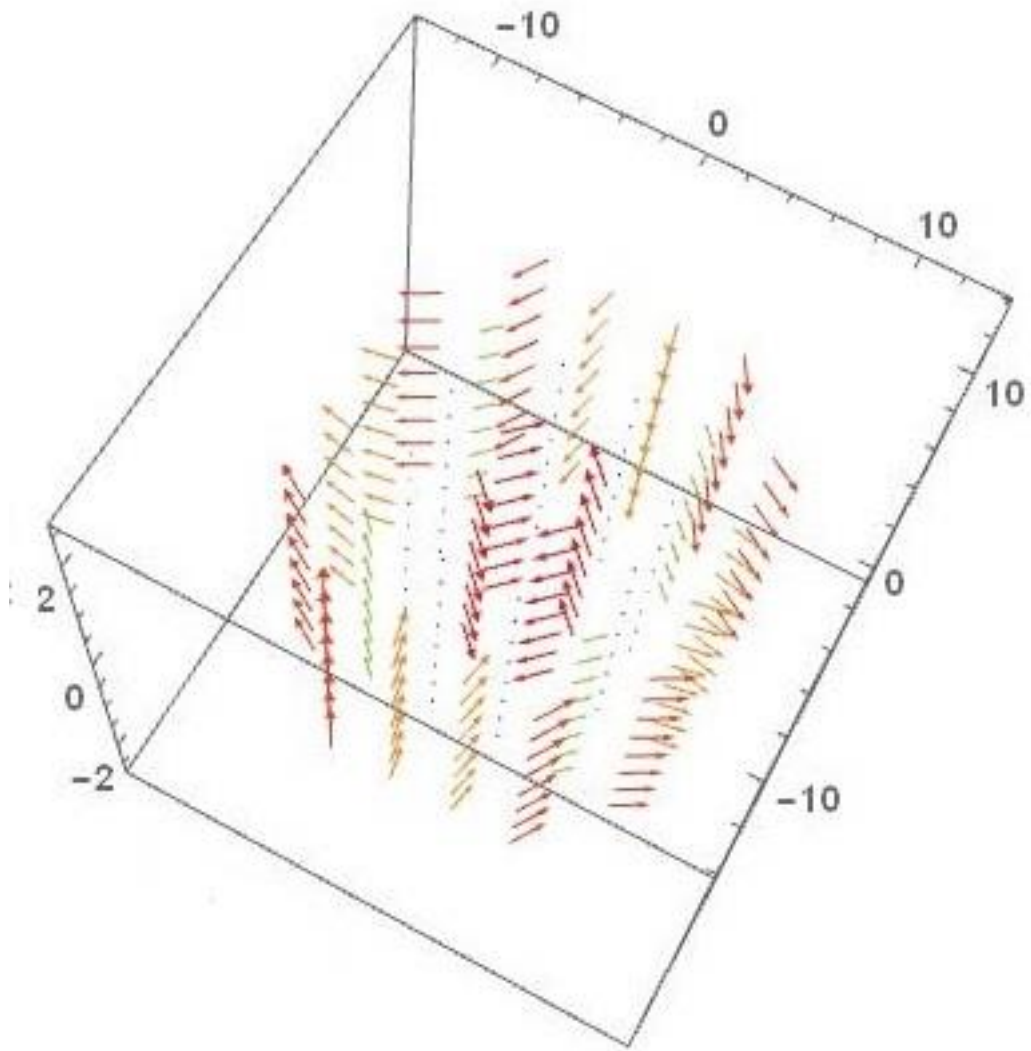


Рис.2.9 Векторне поле для вектора \vec{m} для скірміоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, за формулою (2.54) з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

Розглянемо залежність вектора антиферомагнетизму та намагніченості для скірміоніума (Рис. 2.10 – 2.11)

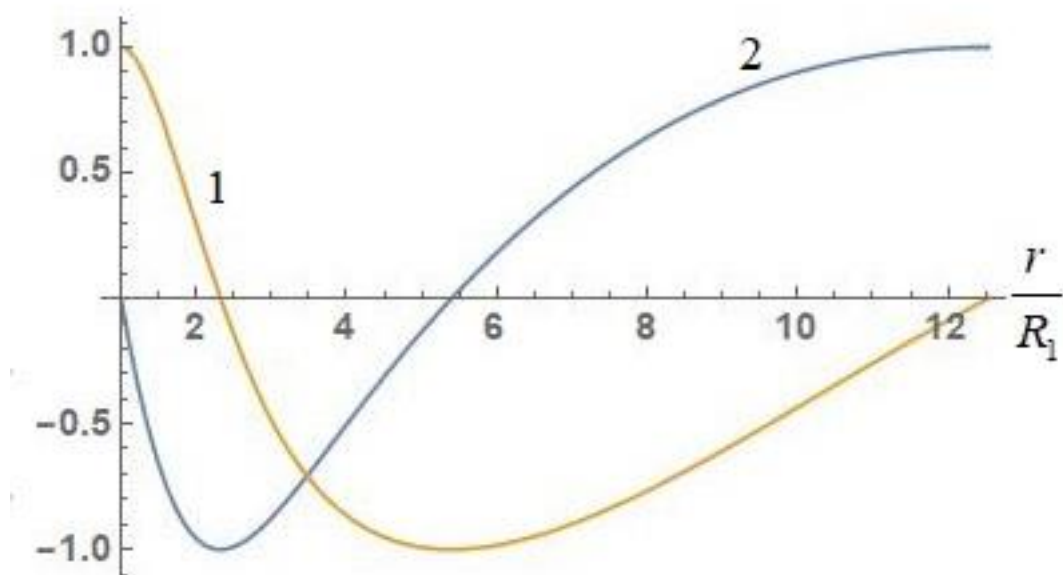


Рис. 2.10 Залежність проекції вектора \vec{l} для скіrmіоніума на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферомагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки

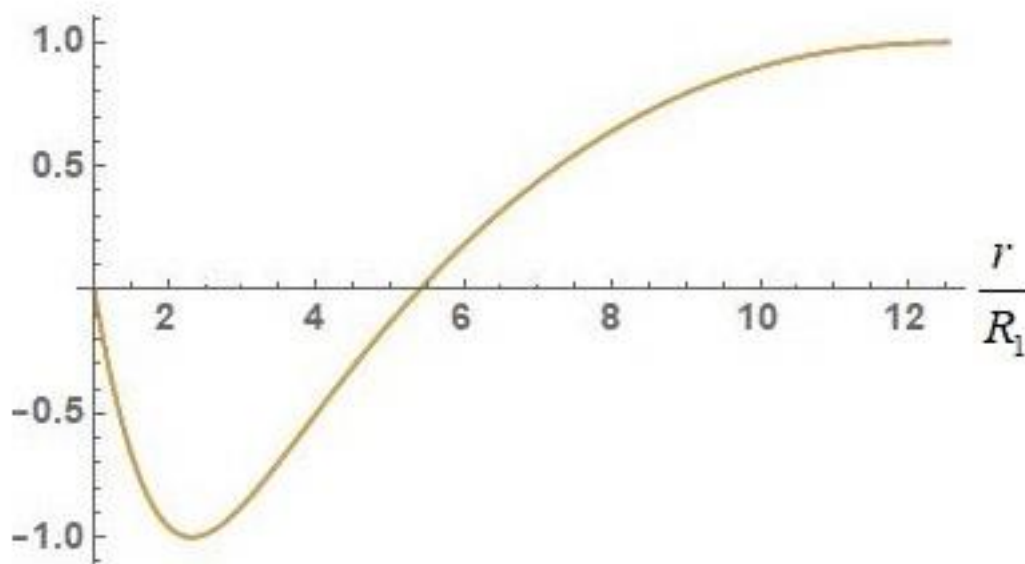


Рис. 2.11 Залежність проекції вектора \vec{m} для скіrmіоніума на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферомагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки

Розглянемо схематичне зображення проекції вектора намагніченості на антиферомагнетизму для скірміоніума (Рис.2.12 – 2.13)

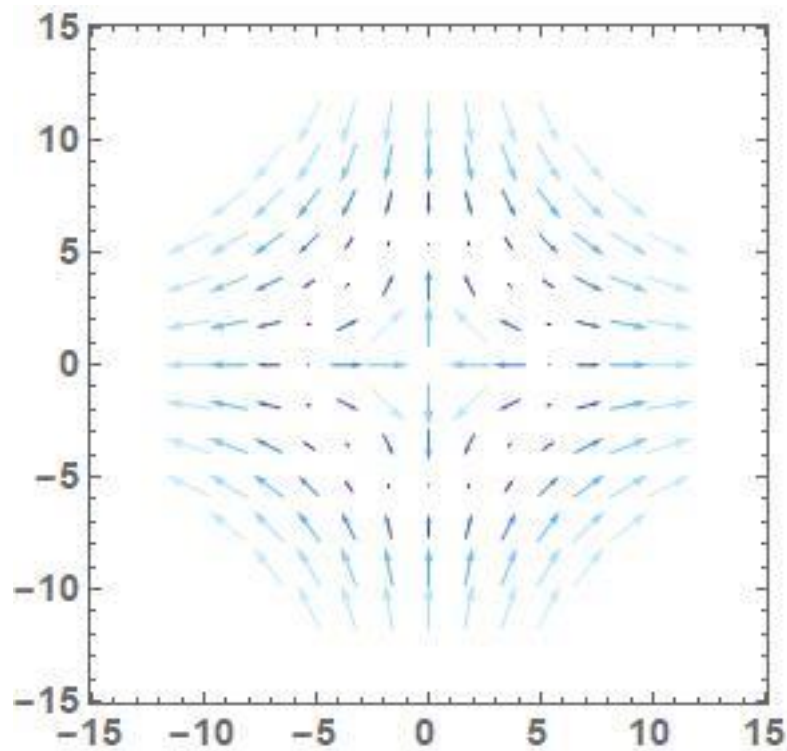


Рис.2.12 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{m} для скірміоніума на площину XOY за формулою (2.54) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$,

$$\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 6 \text{ нм}.$$

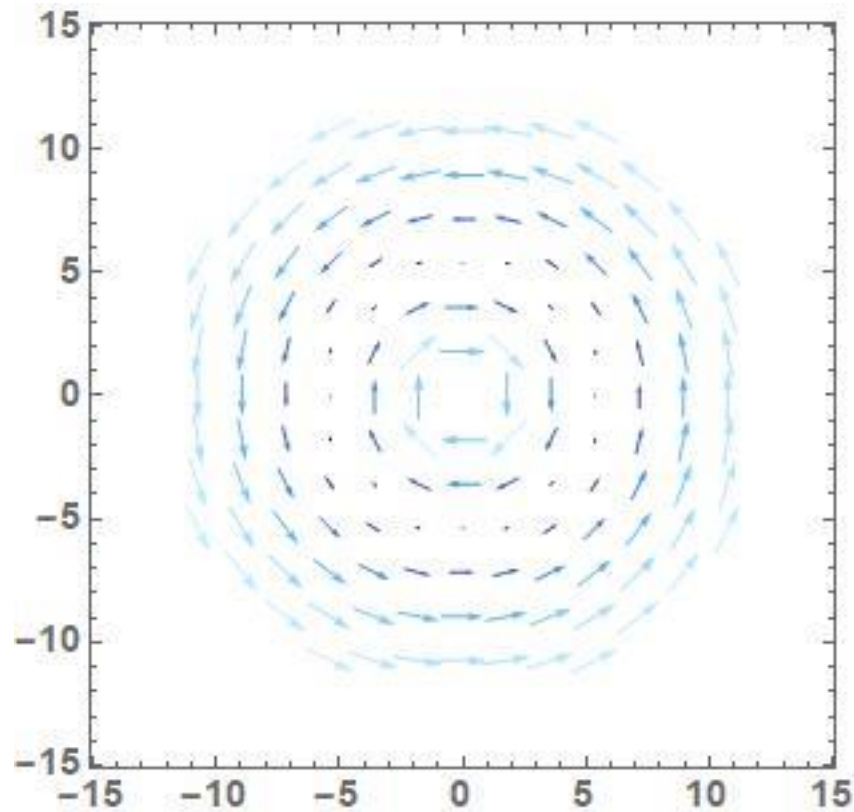


Рис.2.13 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{l} для скіrmіоніума на площину XOY за формулою (2.2) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$,

$$\delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 6 \text{ нм}.$$

Розглянемо різницю поверхневої густини енергії для рухомого та нерухомого скіrmіоніума в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці (Рис.2.14)

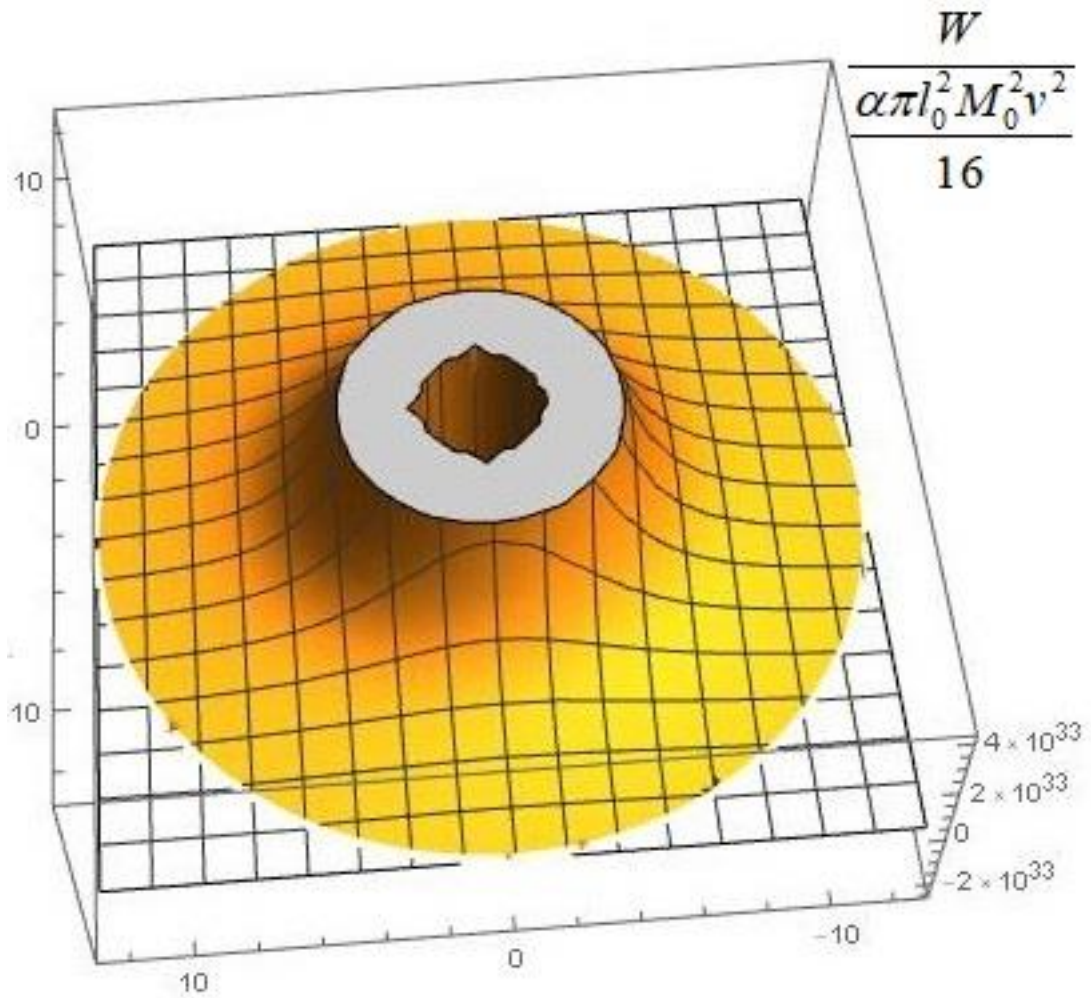


Рис.2.14 Різниця поверхневої густини енергії скіrmіоніума поділено на

$$\frac{W}{\frac{\alpha \pi l_0^2 M_0^2 v^2}{16}} \text{ в формі циліндричної нанооболонки за формулою (2.79), з}$$

радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи

$$\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2, \alpha' \approx 10^{-12} \text{ см}^2, \beta = 1, \delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3,$$

$$l_0 = 5 \text{ нм}.$$

Розглянемо залежність вектора антиферомагнетизму та намагніченості для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума (Рис.2.15 – 2.16)

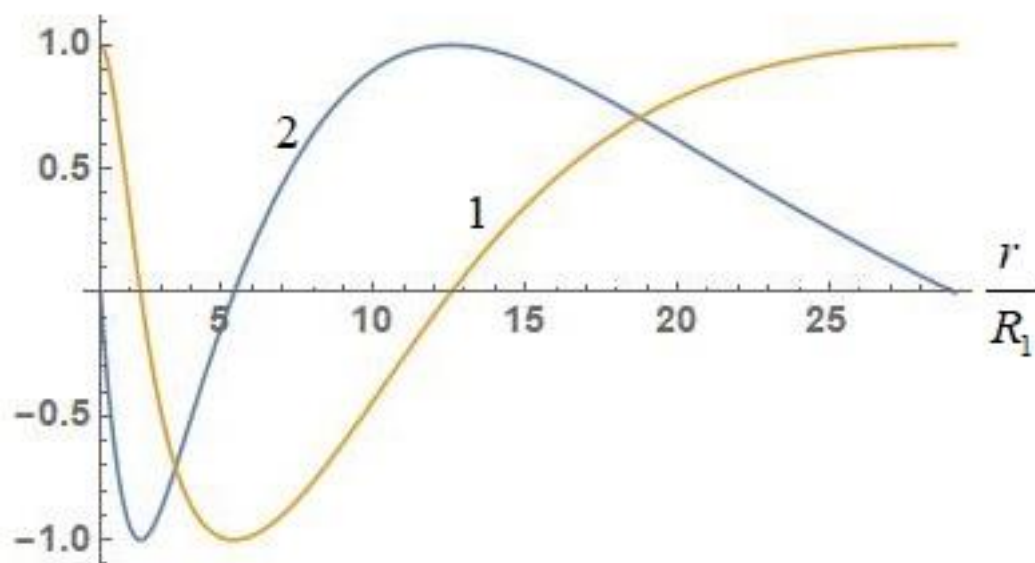


Рис.2.15 Залежність проекції вектора \vec{l} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки

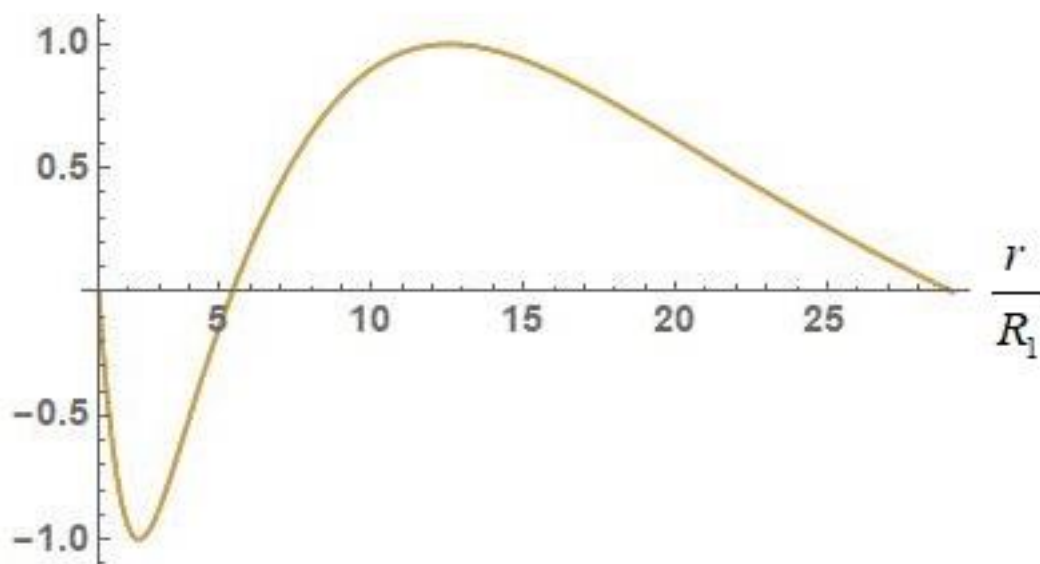


Рис.2.16 Залежність проекції вектора \vec{m} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума на вісь OZ від відстані до центру циліндричної антиферромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу $R=1$ нанооболонки

Розглянемо схематичне зображення проекції вектора намагніченості та антиферомагнетизму для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума (Рис.2.17 – 2.18)

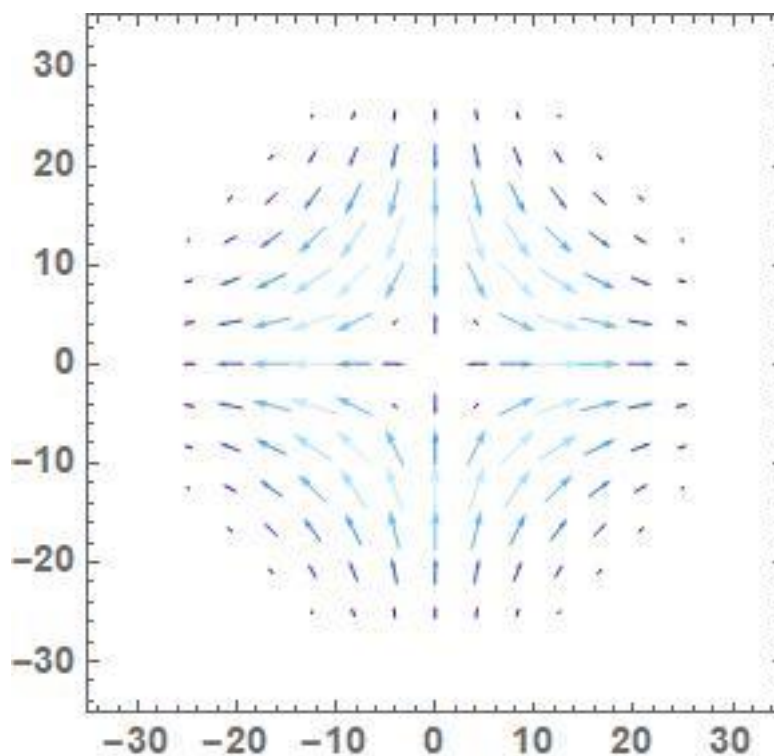


Рис.2.17 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{m} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума на площину XOY за формулою (2.54) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи

$$\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2, \beta = 1, \delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 6 \text{ нм}.$$

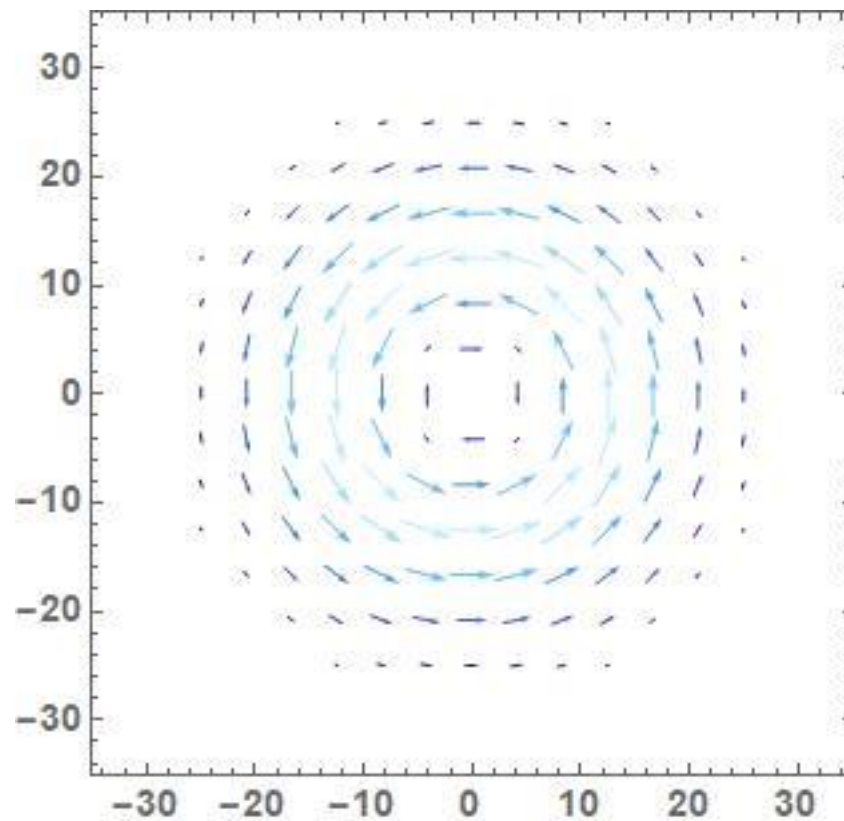


Рис.2.18 Схематичне зображення напрямку проекції вектора \vec{l} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума на площину XOY за формулою (2.2) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи

$$\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2, \beta = 1, \delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3, d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3, l_0 = 6 \text{ нм}.$$

Розглянемо векторне поле для вектора намагніченості та антиферомагнетизму для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки (Рис.2.19 – 2.20)

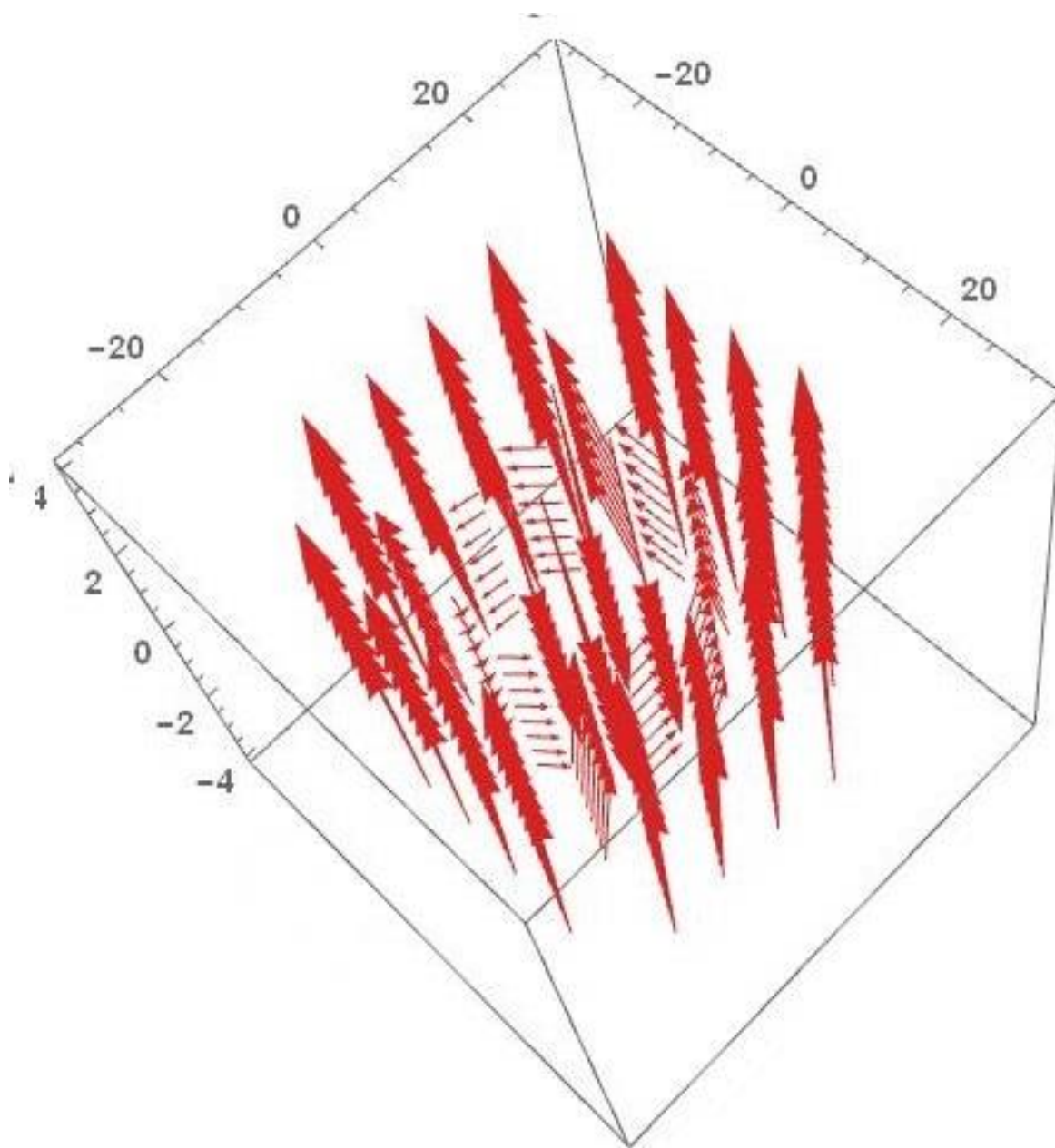


Рис.2.19 Векторне поле для вектора \vec{l} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$ за формулою (2.2), з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

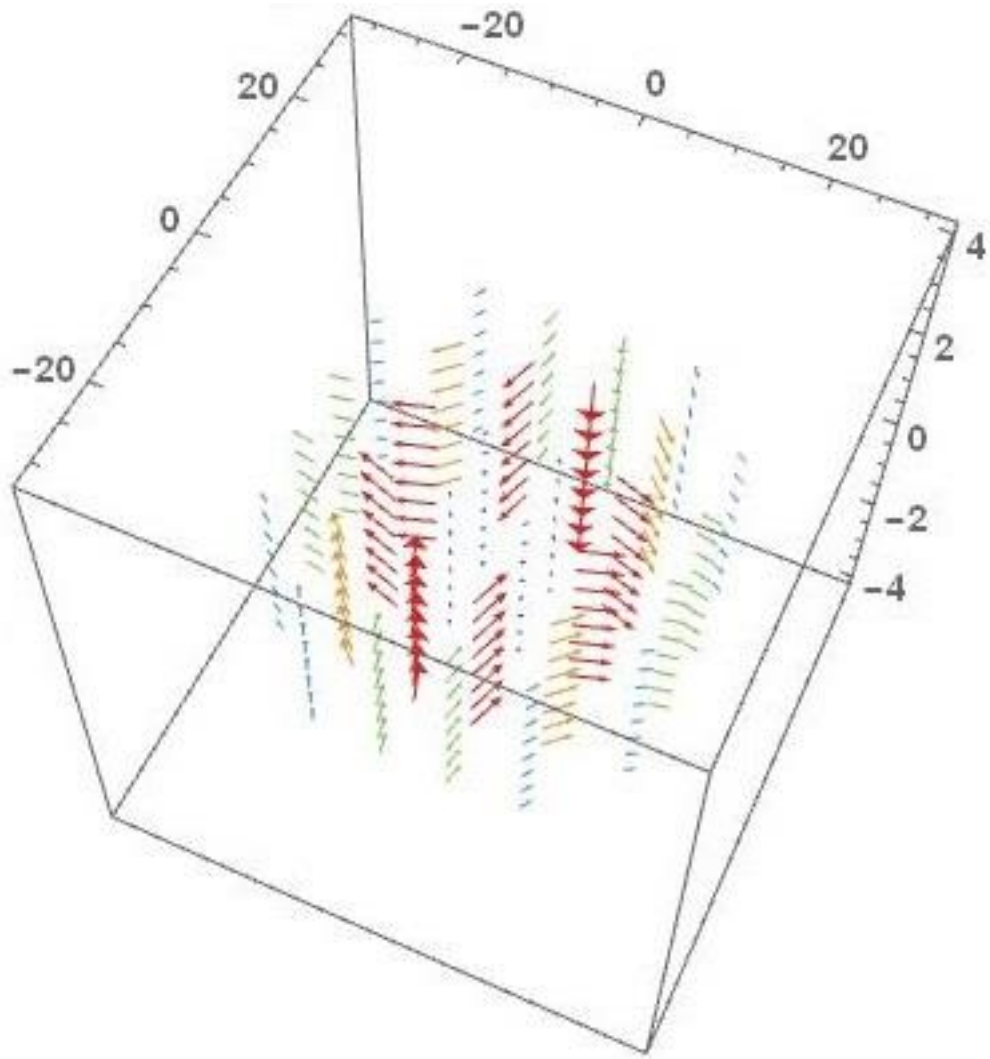


Рис.2.20 Векторне поле для вектора \vec{m} для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума в антиферомагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$ за формулою (2.54), з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d = 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

Розглянемо різницю поверхневої густини енергії для суперпозиції скіrmіона та скіrmіоніума в антиферомагнітній циліндричній нанооболонці (Рис.2.21)

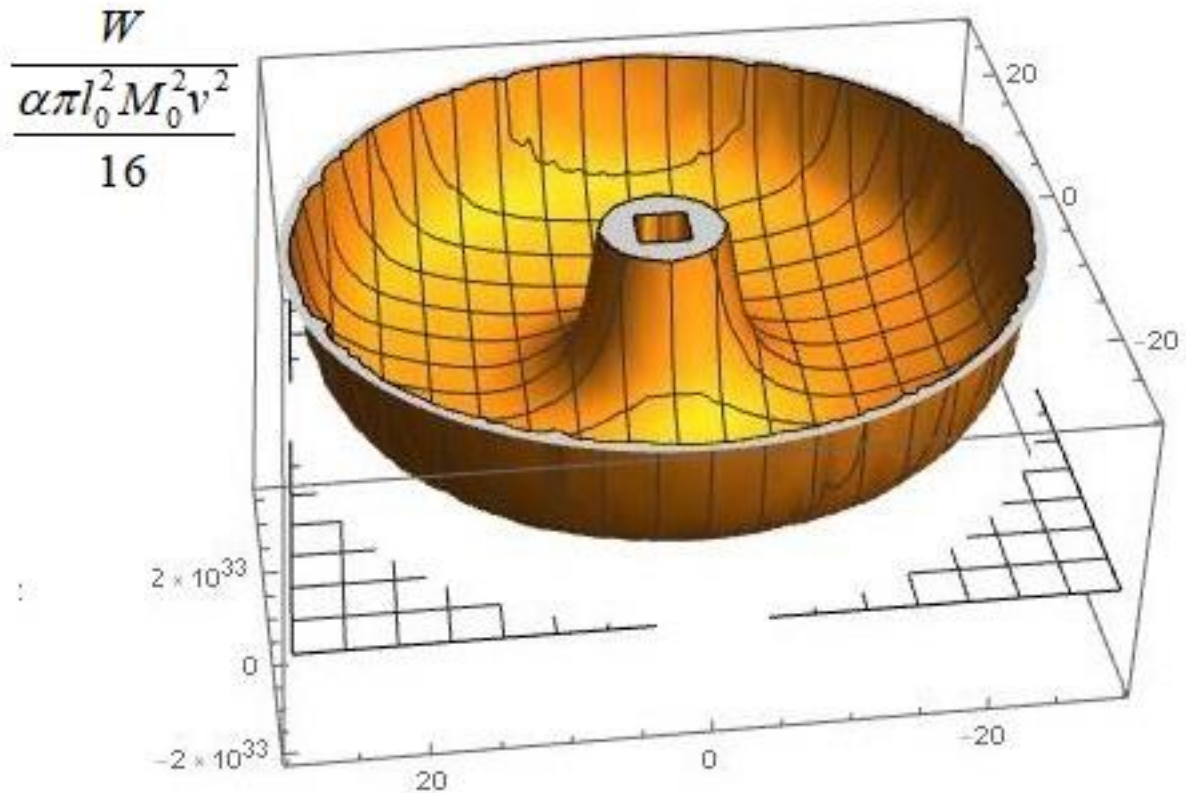


Рис.2.21 Різниця поверхневої густини енергії для суперпозиції скіріміона та скіріміоніума поділено на $\frac{W}{\frac{\alpha \pi l_0^2 M_0^2 v^2}{16}}$ в формі циліндричної нанооболонки за формулою (2.79) з радіусами $R_1 = 1.7l_0$ та $R_2 = 0.8l_0$, з урахуванням наступних параметрів системи $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$, $\alpha' \approx 10^{-12} \text{ см}^2$, $\beta = 1$, $\delta \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг/см}^3$, $d \approx 5.4 \cdot 10^{12} \text{ ерг/см}^3$, $l_0 = 5 \text{ нм}$.

Висновки до розділу II

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що різниця густини енергії рухомого та нерухомого скірміона для автомодельного розв'язку рівнянь Ландау-Ліфшица зв'язаного стану двох скірміонів в антиферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія є монотонно спадаючою функцією відстані від центру нанооболонки та залежить від двох параметрів $\frac{\alpha l_0^2 M_0^2 v^2 \pi}{16}$ та $\frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2$. Коефіцієнт при $\frac{v^2}{2}$ може розглядатися, як ефективна маса топологічного об'єкту.

На основі розрахованої в магістерській дисертації аналітичної моделі показано, що різниця густини енергії для рухомого та нерухомого зв'язаного стану скірміону та скірміоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія радіально спадає від двох країв антиферромагнітної циліндричної нанооболонки, а також має мінімум всередині нанооболонки та залежить від двох параметрів $\frac{\alpha l_0^2 M_0^2 v^2 \pi}{16}$ та $\frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2$.

Коефіцієнт при $\frac{v^2}{2}$ може розглядатися як ефективна маса топологічного об'єкту. Дані топологічні об'єкти можуть існувати за однакових граничних умов для параметрів намагніченості та антиферромагнетизму.

ВИСНОВКИ

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що в антиферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія існують зв'язані стани двох скіrmіонів різного радіусу, вкладених один в одного, як блохівського, так і неєлівського типу, а саме топологічні об'єкти – скіrmіоніуми. При цьому вектор намагніченості скіrmіоніума ортогональний до вектора антиферромагнетизму.

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що в антиферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія існують зв'язані стани скіrmіону та скіrmіоніуму різних радіусів, вкладених один в одного, як блохівського, так і неєлівського типу. При цьому вектор намагніченості такого топологічного об'єкту ортогональний до вектора антиферромагнетизму.

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що різниця густини енергії рухомого та нерухомого зв'язаного стану двох скіrmіонів в антиферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія є монотонно спадаючою функцією відстані від центру нанооболонки.

На основі розрахунку різниці густини енергії рухомого та нерухомого зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму в антиферромагнетику з одноосною магнітною анізотропією та взаємодією Дзялошинського-Морія отримано, що функція різниці густин енергії зв'язаного стану скіrmіону та скіrmіоніуму радіально спадає від двох країв циліндричної нанооболонки і має мінімум всередині нанооболонки. При цьому такі топологічні об'єкти, як скіrmіон та зв'язаний стан скіrmіону зі скіrmіоніумом можуть існувати в циліндричній

антиферромагнітній нанооболонці за однакових граничних умов для параметрів порядку, а саме для векторів намагніченості та антиферромагнетизму. Ці топологічні об'єкти мають різну густину енергії та енергію, відповідно і є основним та збудженим станами системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Fleury P A, Porto S P S, Cheesman L E and Guggenheim HJ 1966 *Phys. Rev. Lett.*
2. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 279
3. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 279-280
4. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 282
5. Kittel C., *Phys. Rev.*, 80, 918 (1950)
6. Тикадзуми С., Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения: Пер. с японского. – М.: Мир, 1987. – 419 с., ил.
7. Landau L., Lifshitz E., *Phys. Z. Sowjetunion*, 8, 153 (1935). Lifshitz E., *J. Phys. USSR*, 8, 337 (1944).
8. Magnetic skyrmions: from fundamental to applications / Finocchio G. [et all] // *J Phys. D: Appl. Phys.* 2016. 49,423001
9. А.А. Белавин, А.М. Поляков. Письма в ЖЭТФ 22, 503 (1975).
10. З.В. Гареева, К.Ю. Гуслиенко. Динамика магнитных скирмионов в наноточках. Физика твердого тела, 2018, том 60, вып. 6
11. Slonczewski J C J. *Magn. Magn. Mater.* 159 L1 (1996)
12. Berger L *Phys. Rev. B* 54 9353 (1996)
13. Tsoi Met al. *Phys. Rev. Lett.* 80 4281 (1998)

14. Гареева, Э.В.. Динамика магнитных скирмионов в наноточках/ Э.В.Гареева, К.Ю.Гуслиенко //Физика твердого тела. – 2018. – Т.60, №6. – с.1135-1141. – Библиоогр...:36
15. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. Думка, 1983, 192 с.
16. Kittel C. Physical Theory of Ferromagnetic Domains // Reviews of Modern Physics. 1949. Vol. 21, No. 4. P. 541–583.
17. X. L. Qi and S. C. Zhang, Topological insulators and superconductors, *Rev. Mod. Phys.* 83(4), 1057 (2011)
18. Dynamics of antiferromagnetic skyrmion driven by the spin Hall effect
C Jin, C Song, J Wang, Q Liu *Applied Physics Letters* 109 (18), 182404
19. Skyrmion motion driven by the gradient of voltage-controlled magnetic anisotropy. H Xia, C Song, C Jin, J Wang, J Wang, Q Liu/ *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 458, 57-61
20. Zhang X, Zhou Y, and Ezawa M (2016b). Antiferromagnetic Skyrmion: Stability, creation and manipulation. *Sci Rep* 6, 24795.
21. Phenomenology of current-induced skyrmion motion in antiferromagnets
H Velkov, O Gomonay, M Beens, G Schwiete, A Brataas, J Sinova and R A Duine
New Journal of Physics 18
22. Gorobets Yu.I., Gorobets O.Yu., Kulish V.V. / Spin waves in a two-sublattice antiferromagnet. A self-similar solution of the Landau-Lifshitz equation. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – V. 42, P. 52–61. – 2017.

23. Gorobets O.Yu., Gorobets V.Yu. / Class of three-dimensional solutions of Landau-Lifshitz equations in simply connected specimens of ferromagnets and antiferromagnets of arbitrary shape with uniaxial magnetic anisotropy // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2005. – Vol. 23. – P. 1121-1124.
24. Джежеря Ю.И., Сорокин М.В., Бубук Е.А. / Вихревое состояние антиферромагнетика с одноосной магнитной анизотропией. // *ЖЭТФ*, 2005, Т. 127, вып. 3, С. 633-642.
25. Gorobets O.Yu. / Degeneration of magnetic states of the order parameter relative to the boundary conditions and discrete energy spectrum in ferromagnetic and antiferromagnetic nanotubes // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2006, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2006.06.106>.
26. Leblond H., Veerakumar V. / Magnetostatic spin solitons in ferromagnetic nanotubes. // *Phys Rev B* 2004;70:134413.
27. Antiferromagnetic spin textures and dynamics. O Gomonay, V Baltz, A Brataas, Y. Tserkovnyak. *Nature Physics* 14 (3), 213
28. Spintronics of antiferromagnetic systems. EV Gomonay, VM Loktev. *Low Temperature Physics* 40 (1), 17-35
29. The generalized Landau–Lifshitz equations as tools for description of the dynamics induced by spin-polarized current in multisublattice antiferromagnet. O.V. Gomonay, VM Loktev. *Fizika Nizkikh Temperatur* 41 (9)
30. Mukai Y., Hirori H., Yamamoto T., Kageyama H., Tanaka K. / Resonant antiferromagnetic spin wave excitation by terahertz magnetic near-field with split ring resonator. // *Ultrafast Phenomena XIX*, Springer International Publishing 2015;649-31. Розподіл вектора антиферромагнетизму для ізольованої антиточки та системи віддалених антиточок у антиферромагнетику / Ю. І. Горобець, О. Ю. Горобець, В. В. Куліш // *Наукові вісті Національного технічного університету*

України "Київський політехнічний інститут". - 2014. - № 4. - С. 113-118. -
 Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NVKPI_2014_4_21

32. A. Hoffmann, J. Sort, K. S. Buchanan, and J. Nogues, Exchange-Biased Magnetic Vortices, *IEEE Transactions on Magnetics* 44, 1968 (2008).
33. G. Salazar-Alvarez, J. J. Kavich, J. Sort, A. Mugarza, S. Stepanow, A. Potenza, H. Marchetto, S. S. Dhesi, V. Baltz, B. Dieny, A. Weber, L. J. Heyderman, J. Nogués, and P. Gambardella, Direct evidence of imprinted vortex states in the antiferromagnet of exchange biased microdisks, *Appl. Phys. Lett.* 95, 012510 (2009).
34. J. Wu, D. Carlton, J. S. Park, Y. Meng, E. Arenholz, A. Doran, A.T. Young, A. Scholl, C. Hwang, H. W. Zhao, J. Bokor, and Z. Q. Qiu, Direct observation of imprinted antiferromagnetic vortex states in CoO/Fe/Ag(001) discs, *Nature Physics* 7, 303 (2011).
35. S.-B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl, A. Bauer, A. Doran, J. Stöhr, and H. A. Padmore, Vortex core-driven magnetization dynamics, *Science* 304, 420 (2004).
36. B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll, K. W. Chou, T. Tylliszczak, R. Hertel, M. Fähnle, H. Brückl, K. Rott, G. Reiss, I. Neudecker, D. Weiss, C. H. Back, and G. Schütz, Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field, *Nature* 444, 461 (2006).
37. R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle, and C. M. Schneider, Ultrafast Nanomagnetic Toggle Switching of Vortex Cores, *Phys. Rev. Lett.* 98, 117201 (2007).
38. K. Yamada, S. Kasai, Y. Nakatani, K. Kobayashi, H. Kohno, A. Thiaville, and T. Ono, Electrical switching of the vortex core in a magnetic disk, *Nature Materials* 6, 270 (2007).
39. A. Vansteenkiste, K. W. Chou, M. Weigand, M. Curcic, V. Sackmann, H. Stoll, T. Tylliszczak, G. Woltersdorf, C. H. Back, G. Schütz, and B. Van Waeyenberge, X-ray imaging of the dynamic magnetic vortex core deformation, *Nature Physics* 5, 332 (2009).
40. K. S. Buchanan, P. E. Roy, M. Grimsditch, F. Y. Fradini, K. Yu. Guslienko, S. D. Bader, and V. Novosad, Soliton-pair dynamics in patterned ferromagnetic ellipses, *Nature Physics* 1, 172 (2005).
41. Yu. I. Dzhezherya, M. V. Sorokin, and E. A. Bubuk, The Vortex State of an Antiferromagnet with Uniaxial Anisotropy, *J. Exp. Theor. Phys.* Vol. 100, No. 3, 2005, pp. 559–567. <https://doi.org/10.1134/1.1901768>

42. J. Sampaio, V. Cros, S. Rohart, A. Thiaville, and A. Fert, Nucleation, stability and current-induced motion of isolated magnetic skyrmions in nanostructures, *Nat. Nanotechnol.* 8, 839 (2013).
43. N. Nagaosa and Y. Tokura, Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions, *Nat. Nanotechnol.* 8, 899 (2013).
44. R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, and G. Finocchio, A strategy for the design of skyrmion racetrack memories, *Sci. Rep.* 4, 6784 (2014).
45. X. Zhang, M. Ezawa, and Y. Zhou, Magnetic skyrmion logic gates: conversion, duplication and merging of skyrmions, *Sci. Rep.* 5, 9400 (2015).
46. X. Zhang, Y. Zhou, & M. Ezawa, Antiferromagnetic Skyrmion: Stability, Creation and Manipulation, *Sci. Rep.* 6, 24795 (2016).
47. Y. Zhou, E. Iacocca, A. A. Awad, R. K. Dumas, F. C. Zhang, H. B. Braun, and J. Åkerman, Dynamically stabilized magnetic skyrmions, *Nature Communications* 6, 8193 (2015).
48. M. Mochizuki, Spin-Wave Modes and Their Intense Excitation Effects in Skyrmion Crystals, *Phys. Rev. Lett.* 108, 017601 (2012).
49. A.S. Kovalev and J.E. Prilepsky, Influence of the magnetic dipole interaction on the properties of magnetic vortices in particles of small size, *Low Temperature Physics* 30, 70 (2004).
50. R. Höllinger, A. Killinger, and U. Krey, Statics and fast dynamics of nanomagnets with vortex structure, *J. Magn. Magn. Mater.* 261, 178 (2003).
51. K.Y. Guslienko, W. Scholz, R.W. Chantrell, V. Novosad, Vortex-state oscillations in soft magnetic cylindrical dots, *Phys. Rev. B* 71 (14), 144407 (2005).
52. Baryakhtar V.G., Gorobets O.Yu., Gorobets V.Yu. Some exact distributions of order parameter in antiferromagnetic and ferromagnetic media // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2004. – Vol. 280. – P. 377-380.
53. Gorobets O.Yu., Gorobets V.Yu. Class of three dimensional solutions of Landau-Lifshitz equations in simply connected specimens of ferromagnets and antiferromagnets of arbitrary shape with uniaxial magnetic anisotropy // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2005. – Vol. 23. – P. 1121-1124.
54. Gorobets O.Yu. Degeneration of magnetic states of the order parameter relative to the boundary conditions and discrete energy spectrum in ferromagnetic and antiferromagnetic nanotubes // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2006, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2006.06.106>.

55. Mark Richard Dennis. Topological Singularities in Wave Fields // A thesis submitted to the University of Bristol in accordance with the requirements of the degree of Ph.D. in the Faculty of Science, November 2001.
56. Bruce Denardo, William Wright, and Seth Putterman. Observation of a Kink Soliton on the Surface of a Liquid // PRL, VOLUME 64, NUMBER 13 (1990), P. 1518 – 1521.
57. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.// Phil. Mag., 1895, v. 39.
58. V.E. Zakharov; S.V. Manakov (1974). "On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation". Journal of Theoretical and Mathematical Physics 19 (3): 551–559. Bibcode:1974TMP....19..551Z. doi:10.1007/BF01035568. Originally in: Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 19 (3): 332–343. June 1974.
59. Rajaraman, R. (1989). Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North-Holland Personal Library 15. North-Holland. pp. 34–45. ISBN 978-0-444-87047-6.
60. Bloch F. // Z. Physic. – 1932. – Vol. 74. – P. 295.
61. Néel L. // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1955. – Vol. 241. – P. 533.
62. М.Я. Широбоков. К теории механизма намагничивания ферромагнетиков. ЖЭТФ 15, 1, 57 (1945). M. Shirobokov, Zh. eksper. teor. Fiz. 15, 57 (1945).
63. Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 22, вып. 10. – С. 503 – 506.
64. Ходенков Г.С. Некоторые точные многомерные решения уравнения Ландау-Лифшица в одноосном ферромагнетике // ФММ. – 1982. – Т. 54, вып. 4. – С. 644 – 649.
65. Borisov A.B., Zikov S.A., Mikushina N.A., Moskvina A.S. Vortices and magnetic structures of the "target" type in two dimensional ferromagnet with anisotropic exchange interaction // Physics of the Solid State. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. 312 – 320.
66. A. N. Slavin, O. Büttner, M. Bauer, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, M. P. Kostylev, B. A. Kalinikos, V. Grimalsky, and Yu. Rapoport, Chaos 13, 693_2003.
67. A. A. Serga, B. Hillebrands, S. O. Demokritov, A. N. Slavin, P. Wierzbicki, V. Vasyuchka, O. Dzyapko, and A. Chumak, Phys. Rev. Lett. 94, 167202 _2005.

68. Горбачев В. В. Физика полупроводников и металлов: учеб. для вузов / В. В. Горбачев, Л. Г. Спицына. – 2-е изд. – М.: Металлургия, 1982. – 336 с. – Библиогр.: с. 336. – 6800 экз.
69. Поплавко Ю. М. Основы физики магнитных явлений в кристаллах: учеб. пособие / Ю. М. Поплавко. – Київ: АБЕРС, 2007. – 215 с. – Библиогр.: с. 315. – 300 экз.
70. A. A. Serga, T. Schneider, and B. Hillebrands, S. O. Demokritov, M. P. Kostylev. Phase-sensitive Brillouin light scattering spectroscopy from spin-wave packets //Appl. Phys. Lett. 89, 063506 _2006.
71. V. I. Vasyuchka, G. A. Melkov, A. N. Slavin, A. V. Chumak, V. A. Moiseienko and B. Hillebrands. Non-resonant wave front reversal of spin waves used for microwave signal processing // Journal of Physics D: Applied Physics Volume 43 Number 32 (2010).